Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

1226

212

1/173

212;U

اقلیدس

کی

پہلی کتاب

جسے

بابو [illegible] ایم اے - بی ایل پروفیسر گورنمنٹ کالج لاہور نے مڈل سکولوں کی پہلی جماعت کے واسطے تالیف کیا

سررشتۂ تعلیم پنجاب کے صاحب ڈائرکٹر بہادر کے حکم سے

منشی گلاب سنگھ اینڈ سنز گورنمنٹ پبلشر سررشتۂ تعلیم پنجاب نے اپنے مطبع مفید عام لاہور میں چھاپی

213;U

سنہ ۱۸۹۵ء

سررشتۂ تعلیم پنجاب کی بے اجازت

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اصطلاحیں ... محو تعلیمی
1 : 208
215;U

Actue angle ...... زاویہ اکیوٹ (یا حادہ)
Actue angled triangle ...... اکیوٹ زوایا تکون
Altitude ...... ارتفاع
Axiom ...... علم متعارفہ
Axis of Symmetry ...... محور سیمیٹری
Book ...... کتاب
Centre ...... مرکز
Centroid ...... سنٹرائڈ
Circle ...... دائرہ
Circumcentre ...... سرکم سنٹر
Circumference ...... محیط
(To) Circumscribe ...... (کسی شکل کے) گرد بنانا
Complement (of an angle) ...... کانپلیمنٹ
Complements (of a parallelogram) ...... متمم
Concave ...... کانکیو
Concurrent ...... کانکرنٹ
Congruent ...... کانگروئنٹ
Convex ...... کانویکس

214;U

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

English	Urdu
Degree	درجہ
Diagonal	وتر
Diameter	قطر
Distance	فاصلہ
Equal	برابر
Equal in every respect	بعینہٖ برابر
Equilateral	اِکوی لیٹرل
Equivalent	مساوی
External Division.	بیرونی تقسیم
Extremities of a line	خط کے سرے
Figure	فگر
Gnomon	نومن
Hexagon	ہیکسگین - چھکون
Incentre	اِن سنٹر
(To) Inscribe	(کسی فگر کے) اندر بنانا
Internal Division	اندرونی تقسیم
Intersection of Loci	لوکسوں کا تقاطع
Isosceles	آئیسوسیلیس
Kite	کائٹ (یا پتنگ)
Locus	لوکس
Medial Division	میڈیل تقسیم
Median of a triangle	تکون کا میڈین

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Method of Analysis and Synthesis .... قاعدۂ تحلیلی و ترکیبی

Oblong .... قائم الزوایا

Obtuse angled triangle .... آبٹیوس

Orthocentre .... آرتھو سینٹر

Parallelogram .... متوازی الاضلاع

Parallelogram about the diagonal وتر کے گرد کی متوازی الاضلاع

Parallel Pencil .... متوازی پنسل

Parallel straight lines .... خطوط مستقیم متوازی

Pencil .... پنسل

Pentagon .... پنٹیگن یا پچکون

Perimeter .... پیری میٹر

Perpendicular .... عمود

Plane Rectilinial angle .... زاویہ مسطحہ مستقیمۃ الخطین

Plane Rectilinial figure .... مسطحہ مستقیمۃ الخطوط فگر

Plane Superficies .... ہموار سطح

Point .... نقطہ

Polygon .... پالیگن یا کثیر الاضلاع

Postulate .... اصل موضوعہ

Projection .... پروجکشن

Proposition .... شکل

Quadrilateral .... چوکور

Radius .... نصف قطر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Rectangle	قائم الزوایا
Rectangle contained	سطح
Regular figure	رگیولر یا منتظم فگر
Rhomboid	رامبائڈ
Rhombus	رامبس
Right angle	زاویہ قائمہ
Right angled	قائم الزاویہ
Scalene	سکیلین
Segment of a circle	قطعہ دائرہ
Semi circle	نصف دائرہ
Set	سٹ
Square	مربع
Straight line	خط مستقیم
Superficies (Surface)	سطح
Superposition (coincidence)	انطباق
Supplement	سپلیمنٹ
Symmetrical figure	سیمیٹریکل فگر
Trapezium	ٹریپیزیم
Trapezoid	ٹریپیزائڈ
Triangle	تکون
Vertex	راس

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۱ نقطہ وہ ہے۔ جس کے جزو نہ ہوں ۔یعنی جس کی کچھ مقدار نہ ہو +

۲ خط صرف طول ہے بغیر عرض کے +

در اصل خط کا عرض کچھ نہ کچھ ضرور ہوتا ہے۔یہاں بغیر عرض کے لکھنے سے یہ مراد ہے۔کہ عرض کا لحاظ نہ کیا جائے +

۳ خط کے سرے نقطے ہوتے ہیں +

۴ خط مستقیم وہ ہے۔جو اپنے سروں کے درمیان یکساں واقع ہو +

بعض دفعہ خط مستقیم اپنے سروں کا جوڑ کہلاتا ہے +

۵ سطح وہ ہے۔جس میں صرف طول اور عرض ہو +

۶ سطح کے سرے خط ہوتے ہیں +

۷ ہموار سطح وہ ہے۔جس میں کوئی سے دو نقطے لے کر اُن کے درمیان خطِ مستقیم کھینچا جائے۔تو اُس خط کا ہر ایک نقطہ سطح مذکور میں واقع ہو +

۸ زاویۂ مسطحہ مستقیمۃ الخطین دو مستقیم خطوں کا میلان ہے۔جو باہم ایک سطح پر ملیں۔مگر ایک سیدھ میں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نہ ہوں +

اس کو آئندہ مختصراً زاویہ مستقیمہ یا صرف زاویہ کہا کرینگے +
در اصل زاویۂ مسطح کی ٹھیک ٹھیک تعریف نہیں ہو سکتی - یہ کہنا بہتر ہو - کہ جب دو خط مستقیم ایک ہی نقطے سے کھینچے جائیں - تو اُن کے میلان کو زاویۂ مسطح کہا کرتے ہیں - اور زاوئے کی مقدار اس طرح بتانی بہتر ہو - کہ ان خطوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے کے لئے جتنا ان میں سے کسی خط کو اُس نقطے کے گرد کم یا زیادہ گھومنا پڑے - زاوئے کی مقدار اتنی ہی کم یا زیادہ سمجھی جائیگی +

نوٹ

جب ایک نقطے ب پر کئی زاوئے ہوں - تو اُن میں سے ہر ایک زاوئے کو تین حرفوں سے تعبیر کرتے ہیں - اور زاوئے کے راس یعنی اُس نقطے پر جہاں زاویۂ مذکور کے دونو خط ملتے ہیں - جو حرف ہوگا - وہ باقی دو حرفوں کے درمیان آئیگا - اور باقی دو حرفوں میں سے ایک پہلے خط مستقیم پر اور دوسرا دوسرے خط مستقیم پر کسی جگہ واقع ہوگا - مثلاً جو زاویہ کہ خطوں اب اور ج ب کے ملنے سے پیدا ہو - وہ اب ج یا ج ب ا کہلائیگا - اور جو اب اور د ب کے ملنے سے پیدا ہو - وہ زاویہ اب د یا د ب ا سے تعبیر کیا جائیگا -

اور جو د ب اور ج ب کے ملنے سے پیدا ہو - وہ زاویہ د ب ج یا ج ب د سے موسوم ہوگا - غ

لیکن اگر کسی نقطے پر صرف ایک ہی زاویہ ہو - تو وہ اس ایک حرف سے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

بھی جو اُس نقطے پر ہو۔تعبیر کیا جا سکتا ہے۔مثلاً زاویہ ی ف غ کو
صرف زاویہ ف بھی کہ سکتے ہیں ÷

۹ جب ایک خطِ مستقیم دوسرے مستقیم خط پر کھڑا ہوکر متصلہ زاوئے باہم برابر پیدا کرے۔تو اُن میں سے ہر ایک زاوئے کو قائمہ کہتے ہیں +

اور خطِ مستقیم جو دوسرے خط پر کھڑا ہے۔اُس پر عمود کہلاتا ہے ÷

۱۰ جو زاویہ قائمے سے بڑا ہوتا ہے۔اُس کو آبٹیوس (Obtuse) یا مُنفرجہ۔اور جو قائمے سے چھوٹا ہوتا ہے۔اُسے اکیوٹ (Actue) یا حادہ کہتے ہیں +

۱۱ مسطح مستقیمۃ الخطوط فگر (Figure) وہ ہے۔جو ایک حد یا کئی حدوں سے گھری ہوئی ہو +

ہم اس کو مختصراً صرف فگر کہا کرینگے +

۱۲ جو فگر تین مستقیم خطوں سے گھری ہوئی ہو۔اُسے ترکون کہتے ہیں +

ضلعوں کے لحاظ سے ترکون تین قسم کی ہوتی ہیں۔

(۱) اِکوی لیٹرل (Equilateral) جس کے تینوں ضلعے برابر ہوں +

(۲) آئیسوسیلیس (Isosceles) جس کے صرف دو ضلعے برابر ہوں +

(۳) سکیلین (Scalene) جس کے تینوں ضلعے نا برابر ہوں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

زاویوں کے لحاظ سے تکون تین قسم کی ہوتی ہیں۔

(۱) قائم الزاویہ جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو +

(۲) آبٹیوس زاویہ یا منفرجہ الزاویہ جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو +

(۳) اکیوٹ زوایا یا حادۃ الزوایا جس کے تینوں زاویے حادے ہوں +

۱۳ اگر کوئی فگر چار خطوں سے گھری ہو۔تو اُسے چوکور کہتے ہیں + اسی طرح پانچ ضلعوں کی فگر پنچکون اور چھ ضلعوں کی فگر چھکون وغیرہ وغیرہ کہلائیگی +

ان سب کو کثیر الاضلاع یا پالی گن (Polygon) کہتے ہیں +

۱۴ کسی چوکور کے مقابل کے زاوئے ملانے سے جو خط پیدا ہوتا ہے۔وہ چوکور کا وتر کہلاتا ہے +

۱۵ جس مستقیم الخطوط فگر کے تمام ضلعے برابر ہوں۔اور تمام زاوئے بھی برابر ہوں۔اُسے منتظم یا رگیولر (Regular) فگر کہتے ہیں۔مثلاً اکوی لیٹرل تکون ایک رگیولر فگر ہے +

۱۶ دائرہ وہ فگر مسطح ہے۔جو ایک خط منحنی سے جسے محیط کہتے ہیں۔گھری ہوئی ہو۔اور جس کے اندر ایک ایسا نقطہ ہو۔کہ اُس سے جتنے خط مستقیم محیط تک کھینچے جائیں۔سب آپس میں برابر ہوں +

۱۷ یہ نقطہ دائرے کا مرکز کہلاتا ہے +

جو خطِ مستقیم مرکز سے دونو طرف محیط تک کھینچا جائے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اُسے قطر کہتے ہیں +

اس کا جو حصّہ مرکز سے محیط تک کھینچا گیا ہے - اُسے نصف قطر کہتے ہیں +

۱۸ قطر دائرے کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتا ہے - جن میں سے ہر ایک کو نصف دائرہ کہتے ہیں +

۱۹ قطع دائرہ دائرے کا وہ حصّہ ہے - جسے کسی مستقیم خط نے دائرے میں سے کاٹ لیا ہو +

۲۰ خطوط مستقیم متوازی وہ ہیں - جو ایک ہی سطح میں واقع ہوں - اور کتنی ہی دور تک دونو طرف بڑھائے جائیں - کبھی آپس میں نہ ملیں +

۲۱ متوازی الاضلاع وہ چوکور ہے - جس کے مقابل کے ضلعے متوازی ہوں +

متوازی الاضلاع کا وتر وہ خط مستقیم ہے - جو اُس کے مقابل کے زاویوں کو ملائے (دیکھو تعریف ۱۴) +

بعض دفعہ اس وتر کو قطر بھی کہ دیتے ہیں +

۲۲ مربّع وہ چوکور رنگر ہے - جس کے تمام ضلعے برابر ہوں - اور ہر ایک زاویہ قائمہ ہو +

۲۳ جس چوکور کے چاروں زاوئے تو قائمے ہوں - لیکن چاروں ضلعے برابر نہ ہوں - اُسے قائم الزوایا کہتے ہیں +

۲۴ رامبس (Rhombus) وہ چوکور ہے - جس کے چاروں ضلعے تو برابر ہوں - مگر زاوئے قائمے نہ ہوں +

۲۵ رامبائڈ (Rhomboid) وہ چوکور ہے - جس کے صرف

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مقابل کے ضلعے برابر ہوں - اور نہ چاروں ضلعے برابر ہوں - اور نہ زاوئے قائمے ہوں +

نوٹ

واضح ہو - کہ مربع - قائم الزوایا - رامبس اور رامبائڈ یہ سب متوازی الاضلاع کی قسمیں ہیں - ان میں سے مربع - قائم الزوایا اور رامبس مخصوص قسمیں ہیں - ان کے سوا جتنی متوازی الاضلاع ہیں - سب رامبائڈ کہلاتی ہیں +

۲۶ ٹریپیزائڈ (Trapezoid) وہ چوکور ہے - جس کے صرف دو ضلعے متوازی ہوں +

اُصُولِ مَوضُوعہ

یعنی

ابتدائی سوال جن کا عمل فرض کرلیا جاتا ہے

فرض کر لو - ہمیں اختیار ہے - کہ

۱ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک خط مستقیم کھینچ لیں +

۲ خط مستقیم محدود کو جہاں تک چاہیں - سیدھا بڑھا لیں +

۳ کسی مرکز سے کسی دُوری پر دائرہ کھینچ لیں +

اقلیدس میں ہمیں عمل کے لئے صرف رشتطر اور پر کار کے استعمال کی اجازت ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

عُلوم مُتعارفہ

یعنی

ابتدائی مسئلے جن کی صداقت فرض کرلی جاتی ہے

۱ جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں - وہ آپس میں بھی برابر ہوتی ہیں +

۲ اگر برابر چیزوں پر برابر چیزیں بڑھائیں - تو کُل بھی برابر ہونگے +

۳ اگر برابر چیزوں میں سے برابر چیزیں گھٹائیں - تو باقیاں بھی برابر رہینگی +

۴ اگر برابر چیزوں پر نا برابر چیزیں زیادہ کریں - تو کُل بھی نا برابر ہونگے +

۵ اگر نابرابروں میں سے برابر گھٹائیں - تو باقیاں بھی نابرابر رہینگی +

۶ جو چیزیں ایک ہی چیز سے دو چند ہوں - وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں +

۷ جو چیزیں ایک ہی چیز کی نصف ہوتی ہیں - وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۸ جو مقداریں ایک دوسری پر منطبق ہو جاتی ہیں - یعنی ہُو بہُو ایک ہی سی جگہ لیتی ہیں - وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں +

۹ کُل اپنے جُز سے بڑا ہوتا ہے +

۱۰ دو مستقیم خط سطح نہیں گھیر سکتے +

۱۱ سب قائمے زاویئے آپس میں برابر ہوتے ہیں +

۱۲ اگر ایک خطِ مستقیم دو مستقیم خطوں سے اس طرح ملے - کہ ایک طرف کے دو اندرونی زاویئے دو قائموں سے کم پیدا کرے - تو بڑھانے سے وہ دونو خط اُس طرف جدھر کے زاویئے دو قائموں سے چھوٹے ہیں - مل جائینگے +

نوٹ

اس کا استعمال کتاب ۱ شکل ۲۹ میں آئیگا +

بعضوں کے نزدیک یہ علم متعارفہ ذیل کے علم متعارفہ سے نکل سکتا ہے

"دو خطوط مستقیم جو ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں - کسی ایک ہی مستقیم خط کے متوازی نہیں ہو سکتے" - یا یوں کہو - کہ "کسی دیئے ہوئے نقطے پر سے کسی خطِ مستقیم کا متوازی ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے" +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہندی طالب علموں کی سہولیت کے لئے ہم آٹھویں شکل تک پوری پوری عبارت لکھینگے۔ لیکن نویں شکل سے جو الفاظ بار بار آوینگے۔ اُن کی بجائے اختصار کے واسطے مفصلۂ ذیل علامات استعمال کرینگے۔

علامت				
∵	استعمال ہوگا بجائے			"چونکہ"
∴	〃	〃	〃	"اس واسطے" یا "اس لئے"
=	〃	〃	〃	"کے برابر ہے" یا "کے برابر ہیں"
<	〃	〃	〃	"سے بڑا ہے" یا "سے بڑے ہیں"
>	〃	〃	〃	"سے چھوٹا ہے" یا "سے چھوٹے ہیں"
△	〃	〃	〃	"مثلث"
⊙	〃	〃	〃	"دائرہ"
⊥	〃	〃	〃	"عمود"
∥	〃	〃	〃	"متوازی"
▱	〃	〃	〃	"متوازی الاضلاع"
∧	〃	〃	〃	"زاویہ"

(یہ علامت زاوئے کے تینوں حرفوں یا ایک حرف کے سر پر آتی ہے۔ مثلاً $\widehat{ابج}$ یا $\hat{ب}$

علامت				
تع	〃	〃	〃	"تعریف"
اصل	〃	〃	〃	"اصل موضوعہ"
علم	〃	〃	〃	"علم متعارفہ"
ک	〃	〃	〃	"کتاب"
ش	〃	〃	〃	"شکل"
ح	〃	〃	〃	"حاصل"

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

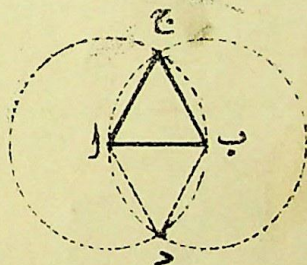
شکل ۱ - سوال

ایک دئے ہوئے خط مستقیم محدود پر ایک ایکوی لیٹرل تکون بناؤ-

فرض کرو اب خط مستقیم ہے-

چاہتے ہیں- کہ اب پر ایک ایکوی لیٹرل تکون بنائیں-

مرکز ا سے اب کی دوری پر دائرہ ب ج د کھینچو } [اصل موضوعہ ۳

مرکز ب سے ب ا کی دوری پر دائرہ ا ج د کھینچو }

نقطہ ج سے جس پر دونو دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں-

خط مستقیم ج ا اور ج ب نقطوں ا اور ب تک کھینچو-

چونکہ نقطہ ا دائرہ ب ج د کا مرکز ہے-

اس واسطے اج اب کے برابر ہے- [تعریف ۱۶

اور چونکہ نقطہ ب دائرہ اج د کا مرکز ہے-

اس واسطے ب ج ب ا کے برابر ہے- [تعریف ۱۶

اسلئے اج ب ج اب سب آپس میں برابر ہیں- [علم متعارفہ ۱

پس ا ب ج ایکوی لیٹرل تکون ہوئی +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

۱۔ ج سے ا تک خطِ مستقیم کھینچو، اس کی بجائے مختصراً یہ کہا کرینگے کہ ج ا کو ملاؤ +

۲۔ تکون کے کسی ضلع کو ہم قاعدہ مان سکتے ہیں۔ باقی دو ضلعے جہاں ملتے ہیں۔ اُس نقطے کو تکون کا راس کہتے ہیں +

۳۔ چوکور ا ج ب د کے چاروں ضلعے برابر ہونگے۔ اور ایسی چوکور کو ہم رامبس (Rhombus) کہا کرتے ہیں +

مثال

اگر نقطہ د کو جہاں دونو دائرے دوسری طرف ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ ا اور ب سے ملا دیا جائے۔ تو ا ب د دوسری ایکوی لیٹرل تکون بن جائیگی +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲ - سوال

ایک دئے ہوئے نقطے سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے برابر ایک خطِ مستقیم کھینچو۔

فرض کرو ا ایک نقطہ ہے۔ اور ب ج خطِ مستقیم۔ چاہتے ہیں۔ کہ نقطہ ا سے ب ج کے برابر ایک خطِ مستقیم کھینچیں۔

ا ب کو ملاؤ [اصل موضوعہ ۱

ا ب پر ایکوی لیٹرل تکون د ا ب بناؤ [کتاب ا شکل ۱

مرکز ب سے ب ج کی دوری پر دائرہ ج ھ غ کھینچو [اصل موضوعہ ۳

جو د ب کو بڑھانے سے غ پر کاٹے۔

مرکز د سے د غ کی دوری پر دائرہ غ ق ل کھینچو [اصل موضوعہ ۳

جو د ا کو بڑھانے سے ل پر کاٹے۔

تو ا ل ب ج کے برابر ہوگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چونکہ د دائرہ غ ق ل کا مرکز ہے۔
اس واسطے د ل د غ کے برابر ہے۔ [تعریف ۱۶
لیکن د ا د ب کے برابر ہے۔ [عمل
اس واسطے باقی ا ل باقی ب غ کے برابر ہے [علم متعارفہ ۳
چونکہ ب دائرہ ج ہ غ کا مرکز ہے۔
اس واسطے ب ج ب غ کے برابر ہے۔ [تعریف ۱۶
لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے۔ کہ ا ل ب غ کے برابر ہے۔
اس لئے ا ل ب ج کے برابر ہے + [علم متعارفہ ۱

نوٹ

واضح ہو۔ کہ نقطہ ا کو ب ج کے دونوں میں سے کسی سرے سے ملا سکتے ہیں۔ اور تکون د ا ب کو قاعدے ا ب کے اوپر نیچے جس طرف چاہیں۔ بنا سکتے ہیں۔ اور ضلعوں د ا د ب کو د پر کو بھی بڑھا سکتے ہیں +

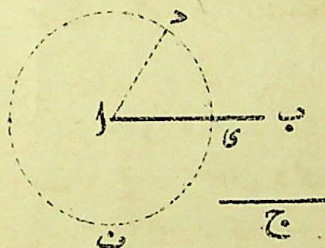
اس طرح اس شکل کا حل آٹھ مختلف طور پر ہو سکتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳ - سوال

دو دیئے ہوئے مستقیم خطوں میں جو بڑا ہے۔
اُس میں سے چھوٹے خط کے برابر حصہ کاٹو۔

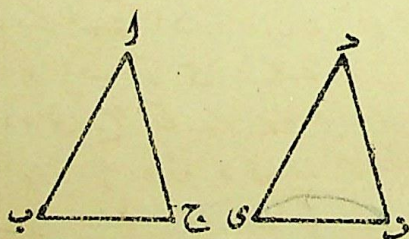
فرض کرو اب اور ج دو خط مستقیم ہیں -
جن میں اب بڑا ہے -
چاہتے ہیں - کہ اب میں سے چھوٹے خط ج کے برابر حصہ کاٹیں۔

نقطہ ا سے خط مستقیم اد ج کے برابر کھینچو۔ [کتاب ۱ شکل ۲
مرکز ا سے اد کی دوری پر دائرہ دی ف کھینچو۔ [اصل موضوعہ ۳
جو اب کو ی پر کاٹے۔
ای ج کے برابر ہوگا۔
چونکہ ا دائرہ دی ف کا مرکز ہے۔
اس واسطے ای اد کے برابر ہے - [تعریف ۱۶
لیکن ج اد کے برابر ہے۔ [عمل
اس لئے ای ج کے برابر ہوا + [علم متعارفہ ۱

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴ - مسئلہ

اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے دو ضلعے دوسری تکون کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں - اور ان دونو ضلعوں کے درمیانی زاوئے بھی آپس میں برابر ہوں - تو اُن کے قاعدے بھی برابر ہونگے - اور دونو تکونیں بھی برابر ہونگی - اور باقی زاوئے بھی اپنی اپنی نظیر کے برابر ہونگے - یعنی وہ زاوئے جو برابر ضلعوں کے مقابل ہیں - برابر ہونگے -

فرض کرو ا ب ج اور د ی ف دو تکونیں ہیں - جن کے دو ضلعے ا ب ا ج دو ضلعوں د ی د ف کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں - یعنی ا ب د ی کے برابر ہے - اور ا ج د ف کے - اور زاویہ ب ا ج زاویہ ی د ف کے برابر ہے -

قاعدہ ب ج قاعدہ ی ف کے برابر ہوگا - اور تکون ا ب ج تکون د ی ف کے - اور باقی زاوئے جن کے مقابل برابر ضلعے ہیں - اپنی اپنی نظیر کے برابر ہونگے - یعنی زاویہ ا ب ج زاویہ د ی ف کے اور زاویہ ا ج ب زاویہ د ف ی کے برابر ہوگا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کیونکہ اگر تکون ا ب ج تکون د ی ف پر اس طرح رکھی جائے۔
کہ نقطہ ا نقطہ د پر۔ اور خط مستقیم ا ب خط مستقیم د ی
پر واقع ہو۔

تو چونکہ ا ب د ی کے برابر ہے۔ [فرض
نقطہ ب نقطہ ی پر منطبق ہوگا۔
اور چونکہ زاویہ ب ا ج زاویہ ی د ف کے برابر ہے۔ [فرض
ا ج د ف پر منطبق ہوگا۔
پھر چونکہ ا ج د ف کے برابر ہے۔ [فرض
اس واسطے نقطہ ج نقطہ ف پر منطبق ہوگا۔
لیکن پہلے ثابت ہو چکا ہے۔ کہ نقطہ ب نقطہ ی پر منطبق
ہوتا ہے۔

اس واسطے قاعدہ ب ج قاعدہ ی ف پر منطبق ہوگا۔
کیونکہ اگر ایسا نہ ہو۔ تو دو مستقیم خط سطح گھیر لینگے۔
اور یہ ناممکن ہے۔ [علم متعارفہ ۱۰
اسلئے قاعدہ ب ج قاعدہ ی ف کے برابر ہؤا۔ [علم متعارفہ ۸
اور کل تکون ا ب ج کل تکون د ی ف پر منطبق ہوتی ہے۔
اور اس کے برابر ہے۔ [علم متعارفہ ۸
چونکہ ا ب اور ب ج د ی اور ی ف پر منطبق ہوتے
ہیں۔

اس واسطے زاویہ ب زاویہ ی کے برابر ہؤا۔ [علم متعارفہ ۸
اور چونکہ ا ج اور ج ب د ف اور ف ی پر منطبق
ہوتے ہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اس واسطے زاویہ ج زاویہ ث کے برابر ہؤا۔ [علم متعارفہ ۸

نوٹ

۱۔اس طرح کے ثبوت کو انطباق کہتے ہیں +

۲۔جو شکلیں ایک دوسری پر رکھنے سے منطبق ہو جاتی ہیں۔ان کو کہا کرتے ہیں۔کہ وہ بعینہٖ برابر ہیں۔اور چونکہ ان میں سے ایک کا ہر ایک حصہ دوسری کے اپنے مطابق حصے کے برابر ہوتا ہے۔کہا کرتے ہیں۔کہ وہ ہر ایک لحاظ سے برابر ہیں + ایسی شکلوں کو کانگروئنٹ (Congruent) کہا کرتے ہیں +

مثال

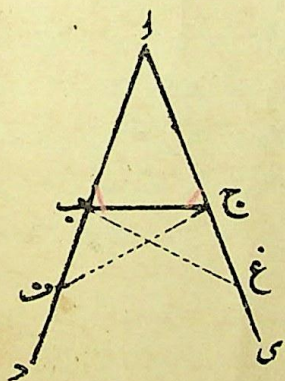
دو چوکور ا ب ج د اور م ق ر س ہیں۔ایک کے تین ضلعے ا ب ب ج ج د دوسری کے تین ضلعوں م ق ق ر ر س کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں۔اور زاویۓ ب اور ج زاویۓ ق اور ر کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں۔ثابت کرو۔کہ یہ چوکور کانگروئنٹ ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۵ - مسئلہ

آئیسوسیلس تکون کے قاعدے پر کے زاوئے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ اور اگر اُس کے برابر ضلعے بڑھائے جائیں تو قاعدے کی دوسری طرف کے زاوئے بھی برابر ہونگے۔

فرض کرو اب ج آئیسوسیلس تکون ہے۔
جس کا ضلع اب ضلع اج کے برابر ہے۔
اور فرض کرو۔ کہ خط مستقیم اب اور اج د اور ی تک بڑھائے گئے ہیں۔

تو زاویہ اب ج زاویہ اج ب کے برابر ہوگا۔ اور زاویہ ج ب د زاویہ ب ج ی کے۔

ب د میں کوئی نقطہ ف لو۔ اور بڑے خط ا ی میں سے چھوٹے خط اف کے برابر اغ کاٹو۔ [کتاب ا شکل ۳

اور ف ج اور غ ب کو ملاؤ۔

چونکہ اف اغ کے برابر ہے۔ [عمل
اور اب اج کے۔ [فرض
یعنی دو ضلعے ف ا اور اج دو ضلعوں غ ا اور اب کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور اُن کا درمیانی زاویہ ف ا غ تکونوں ا ف ج اور ا غ ب میں مشترک ہے۔

اس واسطے قاعدہ ف ج قاعدہ غ ب کے برابر ہے۔ زاویہ ا ج ف زاویہ ا ب غ کے برابر ہے۔ اور زاویہ ا ف ج زاویہ ا غ ب کے برابر ہے۔ [کتاب ا شکل ۴

پھر چونکہ کُل ا ف کُل ا غ کے برابر ہے۔ [عل

اور حصہ ا ب حصہ ا ج کے برابر ہے۔ [فرض

اس واسطے باقی ب ف باقی ج غ کے برابر ہے [علم متعارفہ ۳

ف ج غ ب کے برابر ثابت ہو چکا ہے۔

اور زاویہ ب ف ج (جو ب ف اور ف ج کے درمیان ہے)

زاویہ ج غ ب (جو ج غ اور غ ب کے درمیان ہے) کے برابر۔

اس واسطے زاویہ ج ب ف زاویہ ب ج غ کے برابر ہوا [کتاب ا شکل ۴

اور زاویہ ب ج ف زاویہ ج ب غ کے برابر ہوا

لیکن پہلے ثابت ہو چکا ہے۔ کہ کُل زاویہ ا ج ف کل زاویے ا ب غ کے برابر ہے۔

اور نیز حصہ ب ج ف حصہ ج ب غ کے برابر ہے۔

اسلئے باقی زاویہ ا ج ب باقی زاویہ ا ب ج کے برابر ہوا [علم متعارفہ ۳

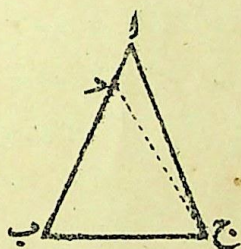
حاصل

پس جس تکون کے ضلعے برابر ہونگے۔ اس کے زاویے بھی برابر ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۶ - مسئلہ

اگر کسی تکون کے دو زاویئے برابر ہوں - تو اُس کے ضلعے بھی جو برابر زاویوں کے مقابل ہیں ہیں - آپس میں برابر ہونگے -

فرض کرو اب ج ایک تکون ہے - جس کا زاویہ اب ج زاویہ اج ب کے برابر ہے -
تو ضلع اج ضلع اب کے برابر ہوگا -
کیونکہ اگر اج اب کے برابر نہ ہو -
تو اِن میں سے ایک دوسرے سے بڑا ہوگا -
فرض کرو اب بڑا ہے - اس میں سے چھوٹے اج کے برابر ب د کاٹ لو - [کتاب ۱ شکل ۳
اور د ج کو ملاؤ -
تو دو تکونوں د ب ج اور اج ب میں
د ب اج کے برابر ہے -
اور ب ج مشترک ہے - [اصل
اور زاویہ د ب ج (جو د ب اور ب ج کے درمیان ہے) زاویہ اج ب (جو اج اور ج ب کے درمیان ہے) کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

212

برابر ہے۔ [فرض
اس واسطے تکون د ب ج تکون ا ج ب کے برابر ہوئی [کتاب ا شکل ۴
یعنی چھوٹی تکون بڑی کے برابر ہوئی - اور یہ باطل ہے۔ [علم متعارفہ ۹
اس لئے اب اج کے برابر ہے +

1/173

حاصل

پس جس تکون کے زاوئے برابر ہونگے - اس کے ضلعے بھی برابر ہونگے +

نوٹ

دو مسئلے ایک دوسرے کا عکس کہلاتے ہیں۔ جبکہ ایک کا فرض دوسرے کا نتیجہ ہو +
مثلاً شکل ۵ اور شکل ۶ ایک دوسرے کا عکس ہیں +

مثال

پانچویں شکل کی فگر میں اگر ہ وہ نقطہ ہو - جہاں ب غ ج ف کو کاٹتا ہے - تو ثابت کرو - کہ ب ہ ہ ج کے برابر ہوگا - اور ف ہ ہ غ کے برابر ہوگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۷ - مسئلہ

ایک ہی قاعدے پر اس کے ایک ہی طرف
ایسی دو تکونیں نہیں ہو سکتیں - کہ اُن کے
وہ ضلعے جو قاعدے کے ایک سرے پر ختم
ہوں - آپس میں برابر ہوں - اور وہ ضلعے بھی
جو دوسرے سرے پر ختم ہوں - برابر ہوں -

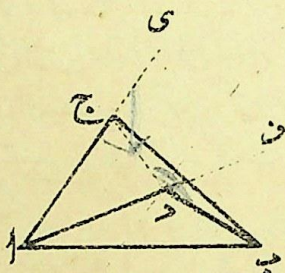
فرض کرو - کہ ایک ہی قاعدے ا ب پر اور اس کی ایک ہی
طرف دو تکونیں ا ج ب اور ا د ب
واقع ہیں - جن کے ضلعے ج ا اور
د ا جو قاعدے کے سرے ا پر
ختم ہوتے ہیں - آپس میں برابر ہیں -
تو ممکن نہیں - کہ اُن کے ضلعے ج ب
اور د ب بھی جو سرے ب پر ختم
ہوتے ہیں - آپس میں برابر ہوں -

ج د کو ملاؤ -

اوّل - جبکہ ایک تکون کا راس دوسری تکون کے باہر ہو -
چونکہ ا ج ا د کے برابر ہے - [فرض
اس واسطے زاویہ ا ج د زاویہ ا د ج کے برابر ہے - [کتاب ا شکل ۵
لیکن زاویہ ا ج د زاویہ ب ج د سے بڑا ہے - [علم متعارفہ ۹
اس لئے زاویہ ا د ج بھی زاویہ ب ج د سے بڑا ہے -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو زاویہ ب د ج زاویہ ب ج د سے اور بھی بڑا ہے۔
اس لیئے ب ج ب د کے برابر نہیں ہے۔ [کتاب ا شکل ۵
دوم۔ جبکہ ایک کا راس مثلاً د دوسری تکون ا ج ب کے
اندر واقع ہو۔

ا ج اور ا د کو ی اور ف تک بڑھاؤ۔
تو چونکہ ا ج ا د کے برابر ہے۔ [فرض
اس واسطے زاویہ ی ج د زاویہ ف د ج کے برابر ہے۔ [کتاب ا شکل ۵
لیکن زاویہ ی ج د زاویہ ب ج د سے بڑا ہے۔ [علم متعارفہ ۹
اس واسطے زاویہ ف د ج بھی زاویہ ب ج د سے بڑا ہؤا۔
تو زاویہ ب د ج زاویہ ب ج د سے بہت ہی بڑا ہؤا۔
اس لئے ب ج ب د کے برابر نہیں ہے۔ [کتاب ا شکل ۵
سوم۔ جبکہ ایک تکون کا راس دوسری کے ضلع پر واقع ہو۔
اس صورت میں ثبوت ظاہر ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

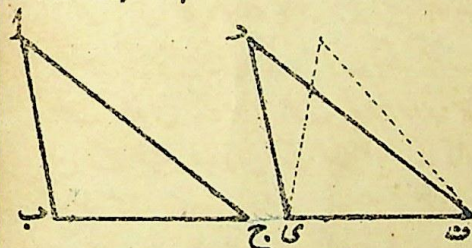
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۸ - مسئلہ

اگر دو تکونوں میں سے ایک تکون کے دو ضلعے دوسری تکون کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں - اور نیز اُن کے قاعدے بھی برابر ہوں - تو دونو تکونوں کے برابر ضلعوں کے درمیانی زاوئے بھی آپس میں برابر ہونگے -

فرض کرو اب ج دی ف دو تکونیں ہیں - جن کے دو ضلعے اب اور اج دو ضلعوں دی اور دف کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں - یعنی اب دی کے اور اج دف کے - اور قاعدہ ب ج بھی قاعدے ی ف کے برابر ہے -

تو زاویہ ب اج زاوئے ی د ف کے برابر ہوگا -

کیونکہ اگر تکون اب ج تکون د ی ف پر اس طرح رکھی جائے - کہ نقطہ ب نقطہ ی پر اور خط مستقیم ب ج خط مستقیم ی ف پر واقع ہو -

تو چونکہ ب ج ی ف کے برابر ہے [فرض

اس واسطے نقطہ ج بھی نقطہ ف پر منطبق ہوگا -

اس لئے جب ب ج ی ف پر منطبق ہو گیا -

تو ب ا اور اج ی د اور د ف پر منطبق ہونگے -

کیونکہ اگر ایسا نہ ہو - تو ایک ہی قاعدے ی ف پر اس کی ایک

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہی طرف د ی ف جیسی اور ایک تکون بن جائیگی- جس کا وہ ضلع جو ی پر ختم ہوتا ہے- د ی کے برابر ہوگا-
اور نیز وہ ضلع جو ف پر ختم ہوتا ہے- د ف کے برابر ہوگا-
اور یہ ناممکن ہے- [کتاب ا شکل ۷
اس لئے زاویہ ب ا ج زاویہ ی د ف پر منطبق ہوتا ہے-
اور اُس کے برابر ہے +

نوٹ

(۱) اس شکل کا دعوے اس طرح بھی ہو سکتا ہے-
اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے تینوں ضلعے دوسری تکون کے تینوں ضلعوں کے برابر ہوں- تو وہ دونو تکونیں کانگروئنٹ ہونگی- یعنی ان کے برابر ضلعوں کے مقابل کے زاویئے بھی برابر ہونگے" +

(۲) دونو تکونوں کو ایک مشترک قاعدے کی مختلف سمتوں پر بنا کر اور اُن کے راسوں کو جوڑ کر بھی یہ شکل ثابت ہو سکتی ہے +

مثالیں

۱- شکل اکی فگر میں ا د اور ب د کو ملاؤ- ثابت کرو- کہ زاوئے ج ا ب اور د ا ب آپس میں برابر ہونگے +

۲- اسی فگر میں ج د کو ملاؤ- اور ثابت کرو- کہ زاوئے ا ج د اور ب ج د برابر ہونگے +

۳- اسی فگر میں فرض کرو- کہ ج د ا ب کو نقطہ ی پر کاٹتا ہے- تو ا ی ی ب کے برابر ہوگا +

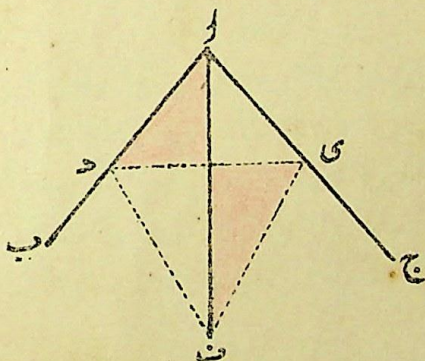
۴- اگر ا ب ج د ایک رامبس ہو- اور ا ج ب د کو ی پر کاٹے- تو ا ی ی ج کے برابر ہوگا- اور ب ی ی د کے- اور چاروں زاوئے ا ی ب ب ی ج ج ی د اور د ی ا آپس میں برابر ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۹ - سوال

دئے ہوئے زاویۂ مستقیمۃ الخطین کی تنصیف کرو۔
یعنی اُسے دو برابر حصوں میں تقسیم کرو۔

فرض کرو ب ا ج زاویۂ مستقیمۃ الخطین ہے۔
چاہتے ہیں۔ کہ اس کی تنصیف کی جائے۔

ا ب میں کوئی نقطہ د لو۔
اور ا ج میں سے ای ا د کے برابر کاٹو۔ [ک اش ۳
د ی کو ملاؤ۔
د ی پر اسے دوسری طرف ایکوی لیٹرل ∆ د ی ف بناؤ [ک اش ۱
ا ف کو ملاؤ۔

خط ا ف ب ا ج کی تنصیف کریگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دو △ ف ا د ف ا ی میں

ا د = ا ی [عمل

ا ف مشترک ہے -

اور د ف = ی ف [قع ۱۲ (۱)

∴ د ا ف = ی ا ف [ک اش ۸

نوٹ

۱- طالب علم کی تشفی کر دینی چاہئے - کہ اس شکل میں "ا سے دوسری طرف" کھنچنے کی کیوں ضرورت ہوئی +

۲- اگر △ د ی ف کے صرف دو ضلعے د ف ی ف ہی برابر ہوں تو بھی خط ا ف زاویہ ب ا ج کی تنصیف کریگا +

۳- ایک چوکور ا د ف ی جس کے ضلعے ا د اور د ف ضلعوں ا ی اور ی ف کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں کائٹ (Kite) یعنی پتنگ کہلاتی ہے +

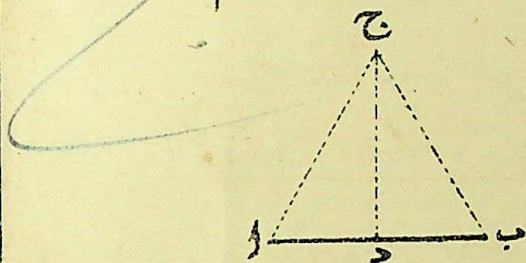
ایسی فگر میں دو کانگروئنٹ △ ا د ف اور ا ی ف مشترک قاعدے ا ف کی مخالف سمت میں ہوتی ہیں - اور اگر اس قاعدے پر ایک △ کو گھما کر دوسری پر رکھ دیا جائے - تو وہ اُس پر منطبق ہو جاتی ہے + اس لئے اس طرح کی فگر کو سیمیٹریکل (Symmetrical) فگر کہتے ہیں - اور ا ف کو محورِ سیمیٹری (Symmetry) کہتے ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۰ - سوال

دئے ہوئے محدود خط مستقیم کی تنصیف کرو۔
یعنی اُسے دو برابر حصّوں میں تقسیم کرو۔

فرض کرو اب خطِ محدود ہے۔
چاہتے ہیں۔کہ اسے دو برابر حصّوں میں تقسیم کرو۔

اب پر ایکوی لیٹرل △ اب ج بناؤ۔ [ک ۱ ش ۱

∠ اج ب کی خط مستقیم ج د سے تنصیف کرو۔ [ک ۱ ش ۹

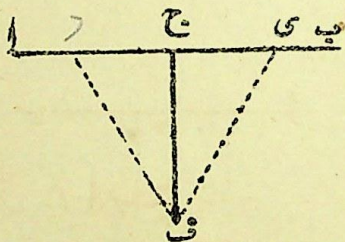
کہ ج د اب سے د پر ملے۔
اب نقطہ د پر دو برابر حصّوں میں تقسیم ہوگا۔
دو △ اج د ب ج د میں
اج = ج ب [عل
ج د مشترک ہے۔
اور ∠ اج د = ∠ ب ج د [عل
∴ اد = دب [ک ۱ ش ۴

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۱ - سوال

ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر اُس کے
دئے ہوئے کسی نقطے سے عمود کھینچو۔

فرض کرو اب خط مستقیم ہے - اور اس میں ج ایک دیا ہؤا نقطہ ہے -
چاہتے ہیں - کہ نقطہ ج سے اب پر عمود کھینچیں -

اج میں کوئی نقطہ د لو - اور ج ب میں سے ج ی ج د کے برابر کاٹو - [ک ا ش ۳
دی پر ایکوی لیٹرل △ دف ی بناؤ - [ک ا ش ۱
اور ج ف کو ملاؤ -
تو ج ف اب پر عمود ہوگا - یعنی اس پر زاوئے قائمے بنائیگا -
دو △ ج ف د ج ف ی میں
دج = ج ی [عل

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج ف مشترک ہے

اور د ف = ف ی [عل

∴ د ج ف = ی ج ف [ک ا ش ۸

∴ یہ قائمے زاوئے ہیں + [نغ

مثالیں

۱- ا اور ب دو دئے ہوئے نقطے ہیں - اور ج اُن کے جوڑ کا نقطۂ تنصیف ہے - اور م اُس عمود میں کوئی نقطہ ہے - جو ج سے ا ب پر کھینچا گیا ہے - ثابت کرو - کہ ا م اور ب م برابر ہیں +

۲- ا اور ب دو دئے ہوئے نقطے ہیں - اور ج اُن کے جوڑ کا نقطۂ تنصیف ہے - اور م ایک ایسا نقطہ ہے - کہ ا م = ب م تو ثابت کرو - کہ ج م ا ب پر عمود ہے +

مثال ۱ اور ۲ کے خاص دعوے ان عام مسئلوں کی صورت میں بیان ہو سکتے ہیں -

(۱) اگر دو دئے ہوئے نقطوں کے جوڑ کے نقطۂ تنصیف سے جوڑ پر عمود کھینچا جائے - تو اس عمود کا ہر ایک نقطہ دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر ہوگا +

(۲) اگر کوئی نقطہ دو دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر ہو - تو وہ نقطہ اُس عمود پر واقع ہوگا - جو اُن دونو نقطوں کے جوڑ کے نقطۂ تنصیف سے کھینچا گیا ہے +

یہ عمود اس نقطے کا لوکس (Locus) بھی کہلاتا ہے - لوکس کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پورے پورے معنی آگے چلکر بتلائے جائینگے (صفحہ ۱۱۷) ✢

۳- دئے ہوئے خط مستقیم غیر محدود ل ث میں ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جو دئے ہوئے نقطوں ا اور ب سے برابر فاصلے پر ہو ✢

(اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے۔ کہ چونکہ جو نقطہ ا اور ب سے برابر فاصلے پر ہے۔ وہ اُن کے جوڑ کے عمود پر بھی واقع ہوگا۔ اس لئے نقطۂ مطلوبہ وہاں ہوگا۔ جہاں کہ یہ عمود دئے ہوئے خط کو کاٹتا ہے) ✢

۴- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جو دو دئے ہوئے نقطوں ا اور ب سے برابر فاصلے پر واقع ہو۔ اور نیز اور دو معیّن نقطوں ج اور د سے بھی برابر فاصلے پر واقع ہو ✢

(یہ نقطہ وہاں ہوگا۔ جہاں دو عمود یا لوکس ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں) ✢

۵- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ کہ تین دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر ہو ✢

۶- کائٹ کا کوئی وتر اُس کے دوسرے وتر کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے ✢

۷- رامبس کا ہر ایک وتر دوسرے وتر کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے ✢

۸- اگر کسی چوکور کا ایک وتر دوسرے وتر کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرے۔ تو یہ چوکور کائٹ ہوگی ✢

۹- اگر کسی چوکور کا ہر ایک وتر دوسرے وتر کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرے۔ تو یہ چوکور رامبس ہوگی ✢

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

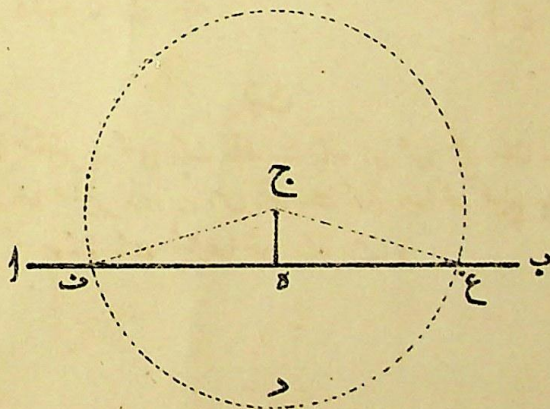
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۲-سوال

ایک خطِ مستقیم غیر محدود پر ایک دئے ہوئے نقطے سے جو اس خط کے باہر ہے - عمود ڈالو-

فرض کرو اب خطِ مستقیم ہے -جس کو دونو طرف جہاں تک چاہیں-بڑھا سکتے ہیں -اور ج اُس کے باہر دیا ہوُا نقطہ ہے-چاہتے ہیں -کہ ج سے اب پر عمود ڈالیں-

اب کی ج سے دوسری طرف کوئی نقطہ د لو-اور مرکز ج سے ج د کی دوری پر ○ د غ ف کھینچو-جو اب سے غ اور ف پر ملے-

ف غ کی ہ پر تنصیف کرو- [ک ا ش ۱۰

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج ہ کو ملاؤ۔

تو ج ہ اب پر عمود ہوگا۔

ج ف اور ج غ کو ملاؤ۔

دو △ ہ ج ف ہ ج غ میں

ف ہ = ہ غ [عمل

ہ ج مشترک ہے۔

اور ج ف = ج غ [تع ۱۶

∴ ج ہ ف = ج ہ غ [ک اش ۸

∴ ج ہ اب پر ⊥ ہے۔ [تع ۹

نوٹ

ایک خط مستقیم پر کسی ایک نقطے سے ایک ہی عمود کھنچ سکتا ہے + جب خط مستقیم مذکور پر اس نقطے سے کوئی ایسا خط کھینچا جائے۔ کہ عمود نہ ہو۔ تو اُسے ٹیڑھا خط کہتے ہیں +

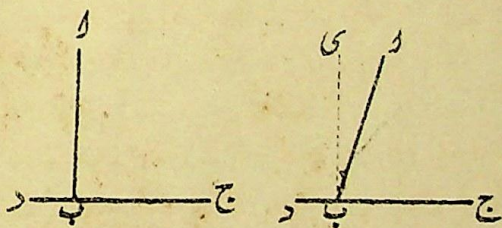
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۳ - مسئلہ

زاوئے جو ایک خطِ مستقیم دوسرے خطِ مستقیم کے ساتھ ایک ہی سمت میں پیدا کرتا ہے - یا دو قائمے ہوتے ہیں - یا ملکر دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں -

فرض کرو - خطِ مستقیم اب ج د کے ساتھ اُس کی ایک ہی سمت میں ج ب ا ، ا ب د پیدا کرتا ہے -

تو یا تو ج ب ا ، ا ب د میں سے ہر ایک قائمہ ہے - یا دونو ملکر دو قائموں کے برابر ہیں -

اگر ج ب ا = ا ب د - تو ان میں سے ہر ایک قائمہ ہے [تع ۹

اگر نہیں - تو نقطہ ب سے ب ی ج د پر زاوئے قائمے بناتا ہؤا کھینچو - [ک ا ش ۱۱

اب ج ب ا ، ا ب ی ملکر = ج ب ی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ تین ج ب ک ا ب ی ی ب د ملکر = دو ج ب ا ی ی ب د [علم ۲

پھر د ب ا = دو د ب ی ی ب ا

∴ د ب ا ا ب ج = تین د ب ی ی ب ا ا ب ج [علم ۲

لیکن یہ تینوں برابر ثابت ہو چکے ہیں دو ج ب ی ی ب ک کے

∴ د ب ا ا ب ج ملکر = ج ب ی ی ب د [علم ۱

جو قائمے زاوئے ہیں ÷ [عمل

حاصل

اگر دو خطوط مستقیم میں سے ایک کا ایک جز دوسرے کے کسی جز پر منطبق ہو- تو یہ دونو خطوط کل کے کل ایک دوسرے پر منطبق ہونگے- یعنی دو خطوط مستقیم ایک مشترک حصّہ نہیں رکھ سکتے ÷

نوٹ

جب دو زاوئے ملکر دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں- تو یہ ایک دوسرے کے سپلیمنٹ (Supplement) کہلاتے ہیں- یہاں ا ب ج ا ب ک کا سپلیمنٹ ہے ÷

جب دو زاوئے ملکر ایک قائمے کے برابر ہوتے ہیں- تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا کامپلیمنٹ (Complement) کہتے ہیں ÷

مثال

اگر دو متصلہ سپلیمنٹ زاوئے ا ب ج اور ا ب د کو خطوط ب ق اور ب ل تنصیف کریں- تو زاویہ ق ب ل قائمہ ہوگا ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

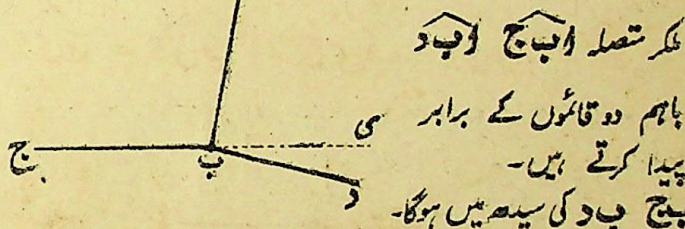
شکل ۱۴ - مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطے پر دو اور خط مستقیم اس کی مقابل سمتوں سے ملکر متصلہ زاوئے باہم دو قائموں کے برابر پیدا کریں۔ تو یہ دو نو خطِ مستقیم ایک دوسرے کی سیدھ میں ہونگے۔

فرض کرو۔ خط مستقیم اب کے نقطہ ب پر دو خطِ مستقیم جب ب د اُس کی مقابل سمتوں سے

ملکر متصلہ $\widehat{ابج}$ $\widehat{ابد}$

باہم دو قائموں کے برابر پیدا کرتے ہیں۔

تو جب ب د کی سیدھ میں ہوگا۔

کیونکہ اگر ب د ب ج کی سیدھ میں نہ ہو۔

اگر ممکن ہو۔ فرض کرو ب ی اُس کی سیدھ میں ہے۔

تو $\widehat{ابج}$ $\widehat{ابی}$ ملکر = دو قائمے زاویوں	[ک ا ش ۱۳
∴ $\widehat{ابج}$ $\widehat{ابی}$ ملکر = $\widehat{ابج}$ $\widehat{ابد}$	[علم ۱
∴ $\widehat{ابی}$ = $\widehat{ابد}$	[علم ۳
اور یہ ناممکن ہے۔	[علم ۹

∴ ب ی ج ب کی سیدھ میں نہیں ہے۔

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ نقطہ ب سے ب د کے سوا اور کوئی خط ایسا نہیں کھینچا جا سکتا۔ جو ج ب کی سیدھ میں ہو۔

∴ ب د ج ب کی سیدھ میں ہے ٭

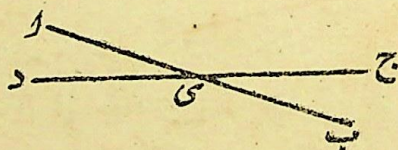
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۵ مسئلہ

اگر دو خطِ مستقیم ایک دوسرے کو کاٹیں۔
تو مقابل کے زاوئے برابر ہونگے۔

فرض کرو دو خط مستقیم اب ج د نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

تو ای ج = دی ب اور ج ی ب = ای د

متصلہ ای ج ای د (جو ای نے ج د کے ساتھ بنائے ہیں) = دو قائمے زاویوں۔ [ک ا ش ۱۳

اور متصلہ ای د دی ب (جو دی نے اب کے ساتھ بنائے ہیں) = دو قائمے زاویوں۔

∴ ای ج ای د = ای د دی ب [علم ۱

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ اِی ج = دی ب

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ج ی ب = ا ی د

حاصل ۱

اگر دو خطِ مستقیم ایک دوسرے کو ایک نقطے پر کاٹیں۔ تو اُن خطوں کے باہم ملنے سے جو زاویے اُس نقطے پر بنتے ہیں۔ وہ سب ملکر چار قائموں کے برابر ہوتے ہیں ÷

حاصل ۲

کتنے ہی خطوں کے ایک نقطے پر ملنے سے جو زاویے پیدا ہوں۔ وہ سب ملکر چار قائموں کے برابر ہوتے ہیں ÷

مثالیں

۱۔ اگر زاویوں ای ج ج ی ب ب ی د دی ا کی تنصیف کرتے ہوئے چار خط ی ف ی غ ی ہ ی ق نقطہ ی سے کھینچے جائیں۔ تو ان خطوط سے دو خط ف ہ غ ق بنینگے۔ جو ایک دوسرے پر عمود ہونگے ÷

۲۔ اگر چار خط ی ا ی ج ی ب اور ی د نقطہ ی سے اس طرح کھینچے جائیں۔ کہ زاویے ای ج ج ی ب = مقابل کے زاویوں ب ی د دی ا اپنی اپنی نظیر کے۔ تو ان خطوں سے دو خطوط مستقیم ا ب ج د بنینگے ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

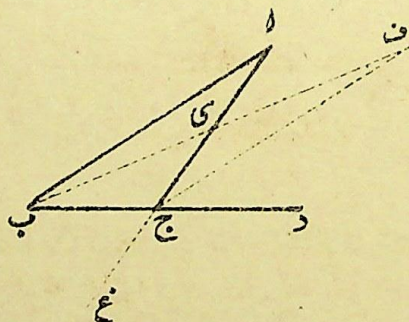
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۶ - مسئلہ

اگر تکون کا کوئی سا ضلع بڑھایا جائے - تو بیرونی زاویہ مقابل کے ہر ایک اندرونی زاوئے سے بڑا ہوگا -

فرض کرو △ اب ج کا ضلع ب ج د تک بڑھایا گیا ہے -

تو بیرونی ا ج د مقابل کے ہر ایک اندرونی ب ا ج ا ب ج سے بڑا ہوگا -

ا ج کی ی پر تنصیف کرو - [ک ا ش ۱۰

ب ی کو ملاؤ - اور اِسے ف تک بڑھاؤ - کہ ی ف ی ب کے برابر بن جائے [ک ا ش ۳

اور ف ج کو ملاؤ

اب △ ا ی ب اور ج ی ف میں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا ی ب = ج ی ف اپنی اپنی نظیر کے [عمل

اور ا ی ب = ج ی ف

∴ ب ا ی = ی ج ف [ک ا ش ۴

لیکن ا ج د > ی ج ف [علم ۹

∴ ا ج د > ب ا ج

اسی طرح اگر ب ج کی تنصیف کی جائے اور ضلع ا ج کو غ تک بڑھایا جائے۔

تو ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ب ج غ > ا ب ج

لیکن ب ج غ = ا ج د [ک ا ش ۱۵

∴ ا ج د > ا ب ج

نوٹ

کسی فگر کا کوئی ضلع بڑھانے سے جو باہر کی طرف زاویہ پیدا ہوتا ہے۔ اُسے بیرونی زاویہ کہتے ہیں ؛

مثلث کے کسی زاویۂ راس سے مقابل کے ضلع کی تنصیف کرتا ہُوا جو خط کھینچا جاتا ہے۔ وہ تکون کا میڈین (Median) کہلاتا ہے۔ چنانچہ ہر تکون کے تین میڈین ہو سکتے ہیں ؛

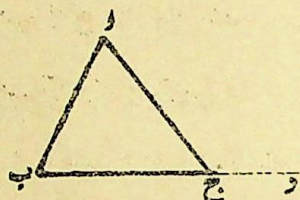
مثال

آئیسوسیلس تکون کے دونو میڈین برابر ہوتے ہیں۔ اور ایکوی لیٹرل کے تینوں میڈین برابر ہوتے ہیں ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۷ - مسئلہ

تکون کے کوئی سے دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہوتے ہیں۔

فرض کرو اب ج ایک △ ہے۔
اس کے کوئی سے دو زاویے ملکر
دو قائموں سے چھوٹے ہیں۔
ب ج کو د تک بڑھاؤ۔

تو بیرونی اج د > مقابل کے اندرونی اب ج [ک ا ش ۱۶

∴ اج د اج ب ملکر > اب ج اج ب [علم ۴

لیکن اج د اج ب ملکر = دو قائمے زاویوں [ک ا ش ۱۳

∴ اب ج اج ب ملکر < دو قائمے زاویوں ۔

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ب اج اج ب اور نیز ج اب اب ج بھی ملکر < دو قائمے زاویوں ۔

مثالیں

۱۔ کسی دیئے ہوئے نقطے سے کسی دیئے ہوئے خط تک دو سے زیادہ ایسے خط نہیں کھینچ سکتے۔ جو آپس میں برابر ہوں ۔

۲۔ آئیسوسیلس تکون کے برابر زاویوں میں سے ہر ایک ایکوٹ ہوتا ہے ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۸ - مسئلہ

تکون کا بڑا ضلع بڑے زاوئے کے سامنے ہوتا ہے -

فرض کرو - کہ △ ا ب ج کا اج ضلع
اب ضلع سے بڑا ہے -

تو ا ب ج > اج ب

اج میں سے اد اب کے
برابر کاٹو - [ک ا ش ۳
اور ب د کو ملاؤ -

∵ اب = اد

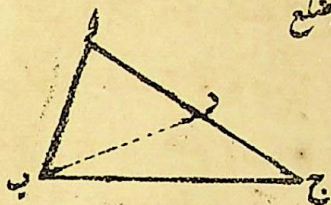
∴ ادب = اب د [ک ا ش ۵

لیکن اب ج > اب د [علم ۹

∴ اب ج > ادب

لیکن بیرونی ادب > مقابل کے اندرونی اج ب [ک ا ش ۱۶

∴ اب ج > اج ب

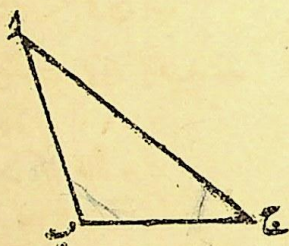
نوٹ

واضح ہو - کہ اس شکل سے یہ بھی پایا جاتا ہے کہ اگر کسی تکون کے ضلعے نابرابر ہوں - تو اُن کے مقابل کے زاوئے بھی نابرابر ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۹ - مسئلہ

تکون کا بڑا زاویہ بڑے ضلع کے سامنے ہوتا ہے -

فرض کرو △ اب ج کا اب ج اج ب سے بڑا ہے -

تو ضلع اج > ضلع اب

چونکہ اج اب کے یا تو برابر ہوگا - یا اس سے بڑا یا چھوٹا ہوگا -

اگر اج = اب

تو اب ج = اج ب [ک اش ۵

اور یہ خلاف مفروض ہے -

اگر اج < اب

تو اب ج < اج ب [ک اش ۱۸

اور یہ بھی خلاف مفروض ہے -

∴ اج > اب

نوٹ

یہ شکل شکل ۱۸ کا عکس ہے ۔

اس شکل سے یہ بھی پایا جاتا ہے - کہ اگر کسی تکون کے زاویے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نابرابر ہوں۔ تو اُس کے ضلعے بھی نابرابر ہونگے +

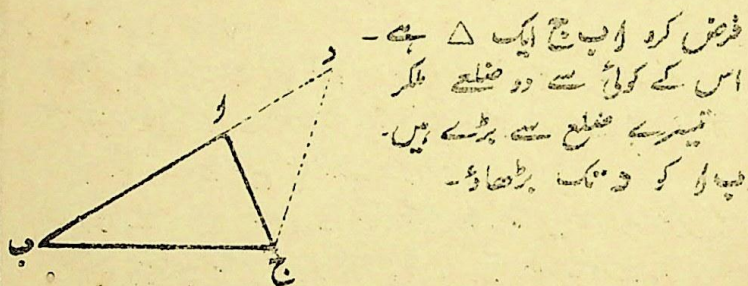
مثال

کسی خط کے بیرونی نقطے سے اس خط تک جتنے خط کھینچے جاتے ہیں۔ اُن میں سے عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے - باقی خطوں میں سے جو اُس عمود کے ساتھ برابر زاویے بناتے ہیں۔ اور آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ اور جو خط عمود کے ساتھ بڑا زاویہ بناتا ہے۔ وہ اُس خط سے بڑا ہوتا ہے۔ جو اُس کے ساتھ چھوٹا زاویہ بناتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۰ ۔ مسئلہ

تکون کے کوئی سے دو ضلعے ملکر
تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہیں۔

فرض کرو ا ب ج ایک △ ہے۔
اس کے کوئی سے دو ضلعے ملکر
تیسرے ضلع سے بڑے ہیں۔
ب ا کو د تک بڑھاؤ۔

اور ا د ا ج کے برابر بناؤ۔ [ک اش ۳
ج د کو ملاؤ۔
تو ∵ ا د = ا ج [عمل
∴ ا د ج = ا ج د [ک اش ۵
لیکن ب ج د > ا د ج
∴ △ ب ج د کا ضلع ب د جو ب ج د کے مقابل ہے >
اسی △ کے ضلع ب ج جو ا د ج کے مقابل ہے [ک اش ۱۹
لیکن ب ا اور ا ج ملکر = ب د [عمل
∴ ب ا اور ا ج ملکر > ب ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ اب اور ب ج > اج
اور ب ج اور ج ا > ب ا

مثالیں

۱- تکون کا کوئی سا ایک ضلع باقی دو ضلعوں کے فرق سے بڑا ہوتا ہے +

۲- چوکور کے کوئی سے تین ضلعے چوتھے ضلع سے بڑے ہوتے ہیں +

۳- تکون کے کوئی سے دو ضلعے ملکر اُس میڈین کے دوچند سے بڑے ہوتے ہیں۔ جو تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے +

۴- تکون کے تینوں راسوں سے کسی نقطے کے فاصلوں کا مجموعہ تکون کے نصف پیری میٹر (Perimeter) سے بڑا ہوتا ہے +

کسی شکل کے اضلاع کے مجموعے کو اس کا پیری میٹر کہتے ہیں +

۵- چوکور کا پیری میٹر اس کے وتروں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے +

۶- کیا پنٹاگن (Pentagon) یا مخمس کا پیری میٹر اس کے پانچوں وتروں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے ؟

۷- ہکسیگن (Hexagon) یا مسدس کے متبادل راسوں کو ملا کر دو تکونیں بنائی گئی ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ ہکسیگن کا پیری میٹر ان دونو تکونوں کے پیری میٹروں کے مجموعے کے نصف سے بڑا ہے +

۸- اب ج دی ف ایک ہکسیگن ہے۔ ثابت کرو۔ کہ اس کا پیری میٹر اس کے تینوں وتروں اد ب ی اور ج ف کے مجموعے کی $\frac{۲}{۳}$ سے بڑا ہے +

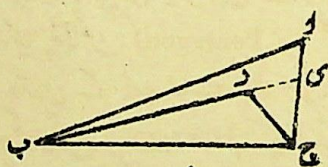
۹- آئسوسیلس تکون کے برابر ضلعوں میں سے ہر ایک اُس کے قاعدے کے نصف سے بڑا ہوتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۱ مسئلہ

اگر تکون کے ایک ضلع کے سروں سے دو خطِ مستقیم کسی نقطے تک جو تکون کے اندر واقع ہو۔ کھینچے جائیں۔ تو یہ خط تکون کے باقی دو ضلعوں سے کم ہونگے۔ مگر ان کا درمیانی زاویہ اُن ضلعوں کے درمیانی زاویے سے بڑا ہوگا۔

فرض کرو د ایک نقطہ △ ا ب ج کے اندر ہے۔ اور اُس کے ضلع ب ج کے سروں ب اور ج سے دو خط د تک کھینچے گئے ہیں۔

تو ب د اور د ج ملکر ب ا اور ا ج کے مجموعے سے چھوٹے ہونگے۔ مگر ∠ ب د ج ∠ ب ا ج سے بڑا ہوگا۔

ب د کو بڑھاؤ۔ کہ ا ج سے ی پر ملے۔

اب ب ا اور ا ی ملکر > ب ی [ک ا ش ۲۰

∴ ب ا ا ی اور ی ج ملکر > ب ی اور ی ج

یعنی ب ا اور ا ج > ب ی اور ی ج

پھر د ی اور ی ج > د ج [ک ا ش ۲۰

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ب د دی اور ی ج > ب د اور د ج

یعنی ب ی اور ی ج > ب د اور د ج

لیکن ب ا اور ا ج > ب ی اور ی ج ثبوت

∴ ب ا اور ا ج > ب د اور د ج

پھر بیرونی ∠ب د ج > مقابل کے اندرونی ∠ب ی ج [ک ا ش ۱۶

نیز بیرونی ∠ب ی ج > مقابل کے اندرونی ∠ب ا ج [ک ا ش ۱۶

∴ ∠ب د ج > ∠ب ا ج

مثال

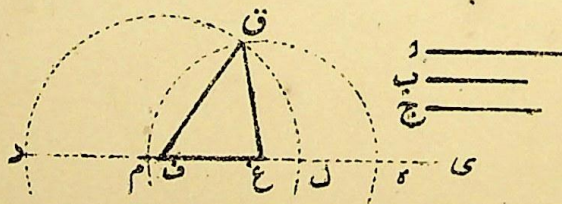
تکون ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ ن ہے۔ثابت کرو۔کہ ن ا ن ب اور ن ج کا مجموعہ ا ب ب ج اور ج ا کے مجموعے سے چھوٹا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۲ - سوال

ایک ایسی تکون بناؤ - جس کے ضلعے تین
دئے ہوئے مستقیم خطوں کے برابر ہوں
بشرطیکہ ان خطوں میں سے کوئی سے
دو مل کر تیسرے سے بڑے ہوں -

فرض کرو ا ب ج تین دئے ہوئے خط مستقیم ہیں - جن میں
سے کوئی سے دو ملکر > تیسرے -
چاہتے ہیں - ایک ایسی تکون بنائیں - جس کے ضلعے ا ب ج
کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں -

دی ایک ایسا خط لو - جو نقطہ د پر محدود اور نقطہ ی کی
طرف غیر محدود ہو -
دف ا کے برابر بناؤ - ف غ ب کے - اور غ ہ
ج کے - [ک ا ش ۳

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

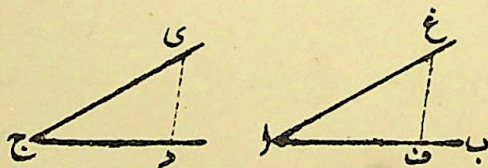
مرکز ف سے ف د کی دوری پر ⊙ د ق ل بناؤ۔
مرکز غ سے غ ہ کی دوری پر ⊙ ہ ق م بناؤ۔ جو ⊙ د ق ل
کو ق پر کاٹے۔
ق ف اور ق غ کو ملاؤ۔
△ ق ف غ کا ضلع ق ف ا کے برابر ہوگا۔ ف غ ب
کے۔ غ ق ج کے۔
اب نصف قطر ف ق = نصف قطر ف د [تع ۱۶
∴ ف ق = ا [علم ۱
پھر نصف قطر غ ق = نصف قطر غ ہ
∴ غ ق = ج
اور ف غ = ب
∴ تینوں خط ق ف ف غ اور غ ق = ا ب اور ج
اپنی اپنی نظیر کے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۳ - سوال

دئے ہوئے خط مستقیم کے دئے ہوئے
نقطے پر ایک زاویۂ مستقیمۃ الخطین ایک
دئے ہوئے زاویۂ مستقیمۃ الخطین کے برابر بناؤ

فرض کرو اب دیا ہُوا خط مستقیم ہے - اور اس میں ا دیا ہُوا
نقطہ ہے - اور د ج ی دیا ہُوا زاویہ ہے -
چاہتے ہیں - کہ اب کے نقطہ ا پر ایک زاویہ د ج ی کے برابر
بنائیں

ج د اور ج ی میں کوئی سے دو نقطے د اور ی لو -
اور د ی کو ملاؤ -
اب میں سے اف ج د کے برابر کاٹو - اور △ اف غ
بناؤ -
جس کے ضلعے اف اغ اور ف غ = تین مستقیم خطوں ج د
ج ی اور ی د اپنی اپنی نظیر کے - [ک ا ش ۲۲

∴ ف اغ = د ج ی [ک ا ش ۸

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

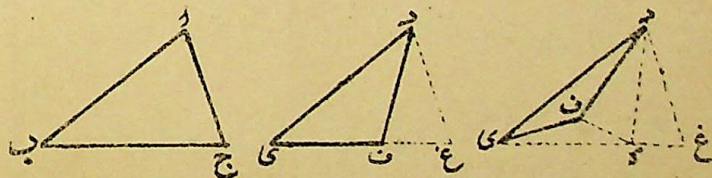
شکل ۲۴ - مسئلہ

اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے دو ضلعے دوسری تکون کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں - مگر ایک کے دونو ضلعوں کا درمیانی زاویہ دوسری کے برابر ضلعوں کے درمیانی زاوئے سے بڑا ہو - تو جس تکون کا زاویہ بڑا ہے - اُس کا قاعدہ بھی دوسری تکون کے قاعدے سے بڑا ہوگا -

فرض کرو اب ج دی ف دو تکونیں ہیں -
ضلعے اب اور اج دی اور دف کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں -
لیکن ب اج ی دف سے بڑا ہے -
تو قاعدہ ب ج بڑا ہوگا قاعدے ی ف سے -

خطِ مستقیم دی کے نقطہ د پر ی دغ ب اج کے برابر بناؤ [ک اش ۲۳
اور دغ اج یا دف کے برابر بناؤ - [ک اش ۳

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور ی غ کو ملاؤ۔
اگر ی غ ف پر سے گزرتا ہے۔ تب تو ظاہر ہے۔ کہ ی غ > ی ف
اور اگر ی غ ف پر سے نہیں گزرتا۔ تو ف د غ کی خط مستقیم د ہ سے تنصیف کرو۔ جو ی غ سے ہ پر ملے۔ [ک ا ش ۹
ہ ف کو ملاؤ۔
تو △ ف د ہ اور غ د ہ میں
ف د د ہ = غ د د ہ
اور ف د ہ = غ د ہ

∴ ہ ف = ہ غ
∴ ی ہ ہ ف = ی غ [علم ۲
لیکن ی ہ ہ ف > ی ف [ک ا ش ۲۰
∴ ی غ > ی ف
اب دونو صورتوں میں △ ب ا ج ی د غ میں
ب ا اج = ی د د غ
اور ب ا ج = ی د غ [عمل

∴ ب ج = ی غ
لیکن ی غ > ی ف
∴ ب ج > ی ف

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

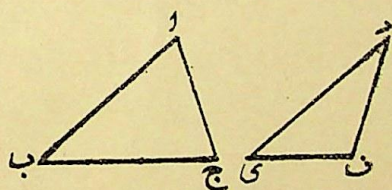
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۵۔ مسئلہ

اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے دو ضلعے دوسری تکون کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں۔ لیکن ایک کا قاعدہ دوسری کے قاعدے سے بڑا ہو۔ تو جس تکون کا قاعدہ بڑا ہے۔ اُس کے ضلعوں کا درمیانی زاویہ دوسری کے برابر ضلعوں کے درمیانی زاوئے سے بڑا ہوگا۔

فرض کرو ا ب ج اور دی ف دو △ ہیں ضلعے ا ب اور ا ج دی اور د ف کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں۔

لیکن قاعدہ ب ج قاعدہ ی ف سے بڑا ہے۔

تو ب ا ج > ی د ف

کیونکہ ب ا ج ی د ف کے یا تو برابر یا اُس سے بڑا یا چھوٹا ہوگا۔

اگر ب ا ج = ی د ف

تو ب ج = ی ف [ک ا ش ۴

جو مفروض کے خلاف ہے۔

اگر ب ا ج < ی د ف

تو ب ج < ی ف [ک ا ش ۲۴

یہ بھی مفروض کے خلاف ہے۔

∴ ب ا ج > ی د ف

نوٹ

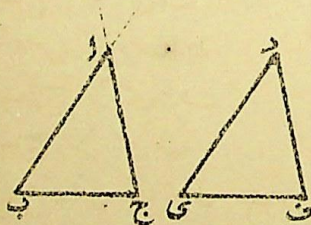
یہ شکل ک ا ش ۲۴ کا عکس ہے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۶ - مسئلہ

اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے دو زاوئے دوسری تکون
کے دو زاویوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں - اور ان
کا ایک ایک ضلع یعنی وہ ضلع جو ہر ایک تکون میں برابر
زاویوں کے متصل یا کوئی سے ایک ایک برابر زاوئے کے
مقابل ہے - برابر ہو - تو باقی ضلعے اپنی اپنی نظیر کے برابر
ہونگے - اور ایک تکون کا تیسرا زاویہ دوسری تکون کے تیسرے
زاوئے کے برابر ہوگا -

فرض کرو اب ج دی ف دو △ ہیں -
ب̂ برابر ہے ی̂ کے اور ج̂ برابر ہے ف̂ کے -
اور اوّل فرض کرو - وہ ضلعے جو دونو △ میں برابر زاویوں کے متصل
ہیں - برابر ہیں - یعنی ب ج
ی ف کے برابر ہے -
تو اب اور اج دی اور دف
کے اپنی اپنی نظیر کے برابر
ہونگے - اور تیسرا ا̂ تیسرے
د̂ کے برابر ہوگا -

ا ب ج د ی ف

کیونکہ اگر △ دی ف △ اب ج پر اس طرح رکھی جائے -
کہ نقطہ ی نقطہ ب پر اور خط ی ف خط ب ج پر واقع ہو -
تو نقطہ ف نقطہ ج پر منطبق ہوگا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∵ ی ف = ب ج

اور خطِ مستقیم ی د خط ب ا پر پڑیگا۔

∴ $\hat{ی} = \hat{ب}$

اور ∴ نقطہ د کسی جگہ اُس خط پر جو ب سے نقطہ ا پر کو گزرے۔ واقع ہوگا ∴ $\hat{ی} = \hat{ب}$ [فرض

پھر نقطہ د کسی جگہ اُس خط پر جو ج سے ا پر کو گزرے۔ واقع ہوگا۔

∵ $\hat{ف} = \hat{ج}$ [فرض

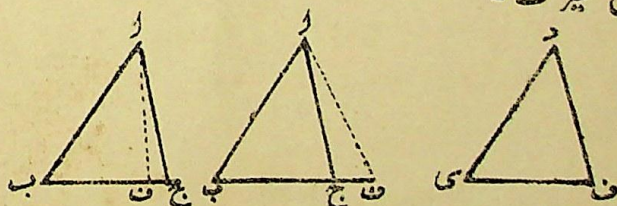
∴ د ا پر منطبق ہوگا۔

اور ∴ کل △ دی ف کل △ ا ب ج پر منطبق ہوتی ہے۔ اور اس کے برابر ہے

اور ا ب = د ی ا ج = د ف

$\widehat{ب ا ج} = \widehat{ی د ف}$

دوم۔ فرض کرو۔ کہ △ ا ب ج دی ف ہیں پہلی صورت کی طرح $\hat{ب}$ اور $\hat{ج}$ $\hat{ی}$ اور $\hat{ف}$ کے برابر ہیں اپنی اپنی نظیر کے۔

ا ب ف ج | ا ب ج ف | د ی ف

لیکن فرض کرو۔ کہ ضلعے ا ب اور د ی جو برابر زاویوں ج ف کے مقابل ہیں۔ برابر ہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو اج اور ج ب دفت اور فناہی کے اپنی اپنی نظیر کے
برابر ہونگے - اور تیسرا زاویہ ا تیسرے زاویئے د کے -
کیونکہ اگر △ دی‌ف △ اب‌ج پر اس طرح رکھی جائے -
کہ نقطہ د نقطہ ا پر اور خط دی خط اب پر واقع ہو -
تو نقطہ ی نقطہ ب پر منطبق ہوگا -
∵ دی = اب
اور ی‌ف ضرور خط ب‌ج پر پڑیگا -
∵ ی^ = ب^
اور اس لیئے نقطہ ف کسی جگہ ضرور اس خط پر پڑیگا - جو
ب سے ج پر کو گزرے -
اگر ف ج پر منطبق نہ ہو -
تو دو اف‌ب^ اور اج‌ب^ آپس میں برابر ہونگے -
جن میں سے ایک △ اف‌اج کا بیرونی زاویہ ہے - اور دوسرا اس
کے مقابل کا اندرونی زاویہ - اور یہ ناممکن ہے - [ک ا ش ۱۶
∴ ف ج پر منطبق ہوتا ہے -
اور اسلیئے کل △ دی‌ف کل △ اب‌ج پر منطبق ہوتی ہے -
اور ضلع دف اج پر منطبق ہوتا ہے - اور ی‌ف ا ج ب پر
اور د^ ا^ پر -

مثالیں

ا - اگر کسی زاویئے کی تنصیف کرتے ہوئے خط کے کسی نقطے سے دو عمود
اُن خطوں پر کھینچے جائیں - جن کے درمیان یہ زاویہ ہے - تو یہ دونو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

عمود آپس میں برابر ہونگے +

ثابت کرو۔ کہ اس کا عکس بھی صحیح ہے +

تع ۔کسی بیرونی نقطے سے کسی خط پر جو عمود ڈالا جاتا ہے ۔ یہی اس نقطے اور خط کا فاصلہ کہلاتا ہے +

چنانچہ مثال ا کو ہم اس طرح بھی بیان کرسکتے ہیں :

"دو خطوں سے برابر فاصلے پر جو نقطہ ہوتا ہے ۔ اس کا لوکس وہ خط ہوتا ہے ۔جو اُن خطوں کے درمیانی زاویئے کی تنصیف کرتا ہے" +

اس مثال کی ذرا زیادہ عام صورت یہ ہے ۔

"اگر دو دیئے ہوئے خط ایک دوسرے کو کاٹیں ۔اور ایک نقطہ ایسا ہو۔کہ اس کا فاصلہ دونو خطوں سے برابر ہو۔ تو اس نقطے کا لوکس وہ دو خط ہیں۔جو دیئے ہوئے دونو خطوں کے متصلہ زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویئے قائمے پیدا کرتے ہیں" (دیکھو مثال ۲ شکل ۱۵) +

۲۔کسی مثلث کے قاعدے پر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو ۔جو دونو ضلعوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو +

(جہاں لوکس اور قاعدہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔نقطۂ مطلوبہ وہیں ہوگا)

۳۔مثلث کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔جو تینوں ضلعوں سے برابر فاصلے پر ہو +

(جہاں دونو لوکس ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ۔وہیں یہ نقطہ ہوگا)

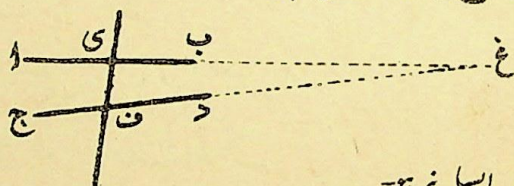
۴۔ اگر دو نقطوں کے جوڑ کے نقطۂ تنصیف سے کوئی خط کھینچا جائے۔ تو وہ دونو نقطے اُس خط سے برابر فاصلے پر ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۷ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم دو اور مستقیم خطوں پر
واقع ہوکر متبادلہ زاوئے باہم برابر پیدا کرے
تو یہ دونو خطِ مستقیم متوازی ہونگے۔

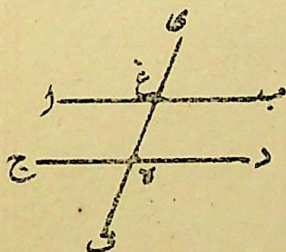
فرض کرو خط مستقیم ی ف اب ج د پر واقع ہوکر متبادلہ
زاوئے ا ی ف ی ف د باہم برابر پیدا کرتا ہے۔
تو اب ج د کا متوازی ہوگا۔

کیونکہ اگر ایسا نہ ہو۔
تو اب اور ج د یا تو ب د کی طرف یا ا ج کی طرف بڑھانے
سے آپس میں مل جائینگے۔
فرض کرو۔یہ ب د کی طرف بڑھائے گئے ہیں۔اور اگر ممکن ہو۔
تو فرض کرو۔کہ نقطہ غ پر آپس میں ملتے ہیں۔
تو غ ی ف ایک △ ہے۔
اور ∴ بیرونی ا ی ف > مقابل کے اندرونی ی ف غ [ک ا ش ۱۶
لیکن ا ی ف = ی ف د [فرض
∴ اب اور ج د ب د کی طرف بڑھانے سے نہیں مل سکتے۔
اسی طرح یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے۔کہ وہ ا ج کی طرف بڑھانے سے بھی نہیں مل سکتے۔
∴ اب ج د کا || ہے۔ [تع ۲۰

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۸ ۔ مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم دو اور مستقیم خطوں پر
واقع ہوکر اپنی ایک ہی طرف بیرونی زاویہ
مقابل کے اندرونی زاوئیے کے برابر پیدا کرے۔
یا ایک ہی طرف کے اندرونی زاوئیے باہم
دو قائموں کے برابر بنائے۔ تو وہ خطِ مستقیم
متوازی ہونگے۔

فرض کرو خط مستقیم ی ف دو مستقیم خطوں ا ب ج د پر واقع ہوکر
اپنی ایک ہی طرف بیرونی ی غ ب
مقابل کے اندرونی غ ۃ د
کے برابر پیدا کرتا ہے۔
یا ایک ہی طرف کے دو اندرونی
ب غ ۃ غ ۃ د باہم دو قائمے
زاویوں کے برابر بناتا ہے۔

ا
ب
ج
د
ی
غ
ۃ
ف

تو ا ب ج د کا ‖ ہے۔

چ ی غ ب = غ ۃ د

[خش

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور ∠ی غ ب = ∠ا غ ہ ۔ [ک ا ش ۱۵

∴ ∠ا غ ہ = ∠غ ہ د ۔ [علم ۱

∴ اب ج د کا || ہے۔ [ک ا ش ۲۷

پھر ∵ ∠ب غ ہ ∠غ ہ د باہم = دو قائموں [فرض

اور ∠ا غ ہ ∠ب غ ہ بھی = دو قائموں [ک ا ش ۱۳

∴ ∠ا غ ہ ∠ب غ ہ = ∠ب غ ہ ∠غ ہ د [علم ۱

∴ ∠ا غ ہ = ∠غ ہ د [علم ۳

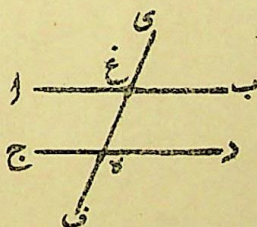
∴ اب ج د کا || ہے ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۹ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم دو متوازی خطوں پر واقع ہو۔
تو وہ خط متبادلہ زاوئے باہم برابر پیدا کریگا۔اور
اپنی ایک ہی طرف بیرونی زاویہ مقابل کے اندرونی
زاوئے کے برابر بنائیگا۔اور ایک ہی طرف کے دو
اندرونی زاوئے بھی باہم دو قائموں کے برابر پیدا کریگا۔

فرض کرو خط مستقیم ی ف دو متوازی خطوں اب ج د پر
واقع ہوتا ہے۔

متبادلہ ∠اغہ ∠غہد برابر ہونگے۔
اور اس خط کے ایک ہی طرف بیرونی
∠یغب مقابل کے اندرونی ∠غہد
کے برابر ہوگا۔
اور ایک ہی طرف کے دو اندرونی ∠بغہ ∠غہد باہم = دو قائموں
کیونکہ اگر ∠اغہ ∠غہد کے برابر نہ ہو۔
تو ان میں سے کوئی ایک دوسرے سے بڑا ہوگا۔
فرض کرو ∠اغہ بڑا ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

لو ∵ ا غ ہ > غ ہ د

∴ ا غ ہ ب غ ہ باہم > ب غ ہ غ ہ د

لیکن ا غ ہ ب غ ہ باہم = دو قائموں [ک ا ش ۱۳

∴ ب غ ہ غ ہ د باہم دو قائموں سے چھوٹے ہیں۔

∴ ا ب اور ج د بڑھانے سے مل جائینگے۔ [علم ۱۲

لیکن یہ نہیں مل سکتے۔ کیونکہ متوازی ہیں۔ [فرض

∴ ا غ ہ غ ہ د کے نابرابر نہیں۔ یعنی اُس کے برابر ہے۔

لیکن ا غ ہ = ی غ ب [ک ا ش ۱۵

∴ ی غ ب = غ ہ د [علم ۱

∴ ی غ ب ب غ ہ = ب غ ہ غ ہ د [علم ۲

لیکن ی غ ب ب غ ہ = دو قائموں [ک ا ش ۱۳

∴ ب غ ہ غ ہ د ملکر = دو قائموں [علم ۱

نوٹ

یہ شکل ک ا ش ۲۷ و ۲۸ کا عکس ہے۔

مثالیں

۱۔ کسی دو نقطوں کے جوڑ کا متوازی خط اُن نقطوں سے برابر فاصلے پر ہوتا ہے

۲۔ اگر کوئی خط دو نقطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو۔ تو یا تو وہ ان نقطوں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کے جوڑ کی تنصیف کریگا- یا اُس جوڑ کے متوازی ہوگا۔

۳- اگر کئی خط ایک ہی دئے ہوئے خط کے ساتھ زاوئے قائم بنائیں- تو آپس میں متوازی ہونگے۔

تع- جب کئی مستقیم خط ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں- تو اُن کو پنسِل (Pencil) کہا کرتے ہیں۔

متوازی خطوں کو بھی متوازی پنسل کہ دیا کرتے ہیں۔

تع- جو خطوط مستقیم ایک ہی ہندسیہ شرط کو پورا کرتے ہیں- اُن سب کو سٹ (Set) کہتے ہیں۔

چنانچہ مثال ۲ اس طرح بھی بیان ہو سکتی ہے۔

"جو خطوط کا سٹ دو نقطوں سے برابر فاصلے پر ہوتا ہے- اُن سے دو پنسلیں بنتی ہیں- جن میں سے ایک ان نقطوں کے جوڑ کے متوازی ہوتی ہے- اور دوسری اس جوڑ کی تنصیف کرتی ہے"۔

۴- خطوط کا سٹ جو دو باہم کاٹنے والے خطوط کے ساتھ برابر زاوئے بناتا ہے- اُس سے دو متوازی پنسلیں بنتی ہیں۔

۵- خطوط کا سٹ جو کسی دئے ہوئے خط کے ساتھ دیا ہؤا آبٹیوس یا اکیوٹ زاویہ بناتا ہے- اُس سے دو متوازی پنسلیں بنتی ہیں۔

۶- اگر دو خط دوسرے دو خطوں کے اپنی اپنی نظیر کے متوازی ہوں- تو پہلے دو خطوں کا درمیانی زاویہ دوسرے دو خطوں کے درمیانی زاوئے کے یا تو برابر ہوگا- یا اس کا سپلیمنٹ ہوگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

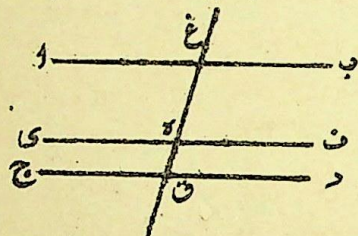
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۰- مسئلہ

جو مستقیم خط ایک ہی خط مستقیم کے متوازی ہوں-
وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں-

فرض کرو مستقیم خطوں اب ج د میں سے ہر ایک ی ف کے || ہے
تو اب ج د کا || ہوگا-

فرض کرو خطِ مستقیم غ ہ ق || اب ی ف ج د کو کاٹتا ہے-

تو ∵ غ ہ ق متوازی خطوں اب ی ف کو کاٹتا ہے-

∴ اغ ہ = غ ہ ف   [ک ا ش ۲۹

اور ∵ غ ہ ق متوازی خطوں ی ف ج د کو کاٹتا ہے-

∴ غ ہ ف = غ ق د   [ک ا ش ۲۹

∴ اغ ہ = غ ق د   [علم ا

∴ اب ج د کا || ہے-   [ک ا ش ۲۷

مثالیں

۱- کسی دئے ہوئے نقطے پر سے جتنے مستقیم خط کھینچے جا سکیں- کھینچو- کہ یہ سب کے سب کسی دئے ہوئے خط کے ساتھ دیا ہؤا زاویہ بنائیں +

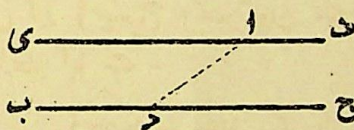
۲- کسی دئے ہوئے نقطے پر سے جتنے خط کھینچے جا سکیں- کھینچو- کہ یہ خط دو باہم کاٹنے والے خطوں کے ساتھ برابر زاویے بنائیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۱ - سوال

دئے ہوئے نقطے پر سے ایک خط مستقیم کسی دئے ہوئے مستقیم خط کا متوازی کھینچو -

فرض کرو ا دیا ہُوا نقطہ اور ب ج دیا ہُوا خط ہے -
چاہتے ہیں - کہ ا پر سے ایک خطِ مستقیم ب ج کا || کھینچیں -
ب ج میں کوئی نقطہ د لو
اور ا د کو ملاؤ -
خط مستقیم ا د کے نقطہ ا
پر د ا ی | ا د ج کے
برابر بناؤ - [ک ا ش ۲۳
اور ا ی کو ف تک بڑھاؤ -
ی ف ب ج کا || ہوگا -
∵ خط مستقیم ا د مستقیم خطوں ب ج ی ف سے مل کر
ی ا د = متبادلہ ا د ج پیدا کرتا ہے - [عمل
∴ ی ف || ہے ب ج کا - [ک ا ش ۲۷

مثال

دو کانگروئنٹ تکون اس طرح رکھی جا سکتی ہیں - کہ ان کا ایک ضلع مشترک ہو - اور باقی برابر ضلعے اپنی اپنی نظیر کے متوازی ہوں ۔

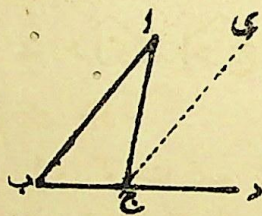
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۲-مسئلہ

اگر تکون کا ایک ضلع بڑھایا جاوے - تو بیرونی زاویہ مقابل کے دو اندرونی زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوگا - اور ہر ایک تکون کے تینوں اندرونی زاویے مل کر دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں -

فرض کرو اب ج ایک تکون ہے - جس کا ضلع ب ج د تک بڑھایا گیا ہے -

ا ی ب ج د

تو بیرونی اج د دو مقابل کے اندرونی ج اب اب ج کے مجموعے کے برابر ہوگا -

اور تینوں اندرونی اب ج ب اج اج ب ملکر دو قائموں کے برابر ہونگے -

ج پر سے ج ی اب کا || کھینچو - [ک ا ش ۳۱

تو ب اج = متبادلہ اج ی [ک ا ش ۲۹

اور بیرونی ی ج د = مقابل کے اندرونی اب ج [ک ا ش ۲۹

∴ کل بیرونی اج د = مقابل کے اندرونی ج اب اب ج [علم ۲

∴ اج د اج ب = ج اب اب ج ب ج ا [علم ۲

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

لیکن اجد اجب ملکر دو قائموں کے برابر ہیں [ک اش ۱۳

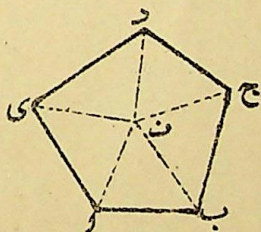
∴ جبا باج بجا مل کر دو قائموں کے برابر ہیں۔ [علم ۱

حاصل ۱

کسی مستقیم الخطوط فگر کے کل اندرونی زاوئے مع چار قائموں کے اُس کے ضلعوں کی تعداد سے دو چند قائموں کے برابر ہوتے ہیں۔

کیونکہ اگر کسی مستقیم الخطوط فگر اب ج د ی کے اندر نقطہ ف لیکر اُس سے ہر ایک زاوئے تک خط مستقیم کھینچیں۔

تو فگر اتنی ہی △ میں تقیسم ہو جائیگی۔

جتنے اُس کے ضلعے ہیں۔

اور گذشتہ شکل کی رُو سے ان △ کے کل زاوئے = △ کی تعداد سے دو چند قائموں یعنی فگر کے ضلعوں کی تعداد سے دو چند قائموں۔

لیکن یہی زاوئے = فگر کے اندرونی زاویوں مع نقطہ ف پر کے زاویوں۔

∴ فگر کے کل اندرونی زاوئے مع ف پر کے زاوئے = فگر کے ضلعوں کی تعداد سے دو چند قائموں۔

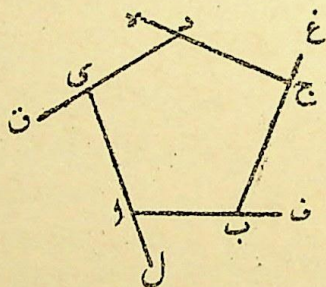
∴ فگر کے کل اندرونی زاوئے مع چار قائموں = فگر کے ضلعوں کی تعداد سے دو چند قائموں۔ [ک ا ش ۱۵ ح ۲

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

حاصل ۲

کسی مستقیم الخطوط شکل کے کل بیرونی زاوئے جو ضلعوں کے ایک ہی طرف بڑھانے سے پیدا ہوتے ہیں۔ ملکر چار قائموں کے برابر ہوتے ہیں۔

∵ ہر ایک اندرونی ∠ا ب ج مع متصلہ بیرونی ∠ج ب ف = دو قائموں [ک ا ش ۱۳

∴ کل اندرونی زاوئے مع کل بیرونی زاوئے = شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دو چند قائموں۔

∴ کل اندرونی زاوئے مع کل بیرونی زاوئے = کل اندرونی زاویوں مع چار قائموں۔ [ک ا ش ۳۲

∴ کل بیرونی زاوئے ملکر = چار قائموں ✻

نوٹ

اس حاصل کی حقیقت اس طرح فوراً سمجھ میں آ جائیگی۔

فرض کرو۔ کوئی سلاخ لت اس شکل کے کسی خاص ضلع ا ب سے شروع

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کرکے باری باری سے تمام ضلعوں پر ایک ہی طرف کو اس طرح پھسلتی جائے کہ ہمیشہ ضلعوں پر منطبق ہوتی رہے۔ تو جب وہ پھر پھرا کر اپنی اصلی جگہ پر واپس آ جائیگی۔ تو صاف ظاہر ہو جائیگا۔ کہ وہ چار قائموں پر سے گھوم گئی ہے۔ مگر جن زاویوں سے یہ سلاخ گھومی ہے۔ وہ اس نگر کے بیرونی زاوئے ہیں۔ اس لئے نگر کے کل بیرونی زاوئے چار قائموں کے برابر ہوئے ٭

نوٹ۔ زاوئے قائمے کو عموماً ۹۰ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اور ان میں سے ہر ایک کو درجہ کہتے ہیں۔ پس تکون کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ ۱۸۰° ہوتا ہے ٭

حاصل ۳

اکوی لیٹرل تکون کا ہر ایک زاویہ ۶۰° کا ہوتا ہے ٭

حاصل ۴

اگر کسی تکون میں دو زاویوں کا مجموعہ تیسرے زاوئے کے برابر ہو۔ تو یہ تیسرا زاویہ قائمہ ہوگا ٭

حاصل ۵

قائم الزاویہ تکون میں اکیوٹ زاوئے ایک دوسرے کے کانپلیمنٹ ہوتے ہیں ٭

حاصل ۶

کسی چوکور کے چاروں زاویوں کا مجموعہ چار قائموں کے برابر ہوتا ہے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مثالیں

۱- اکوی لیٹرل تکون کے زاویے کی مقدار ہمیشہ ایک ہی ہوتی ہے۔ خواہ ضلع کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو +

۲- کسی منتظم نگر کے اندرونی زاویٔے کی مقدار ایک ہی رہتی ہے۔ بشرطیکہ اس کے ضلعوں کی تعداد ایک ہی رہے +

۳- رگیولر ہکسیگن کا اندرونی زاویہ اکوی لیٹرل تکون کے بیرونی زاویٔے کے برابر ہوتا ہے +

اس کا عکس بھی درست ہے +

۴- زاویٔے قائمٔے کی تثلیث کرو۔ یعنی اسے تین برابر حصوں میں تقیم کرو +

۵- خطِ مستقیم جو کسی آئیسوسیلس تکون کے قاعدے کے متوازی اس کے راس پر سے کھینچا جائے۔ بیرونی زاویٔے کی تنصیف کریگا +

۶- اگر ایک خط کسی آئیسوسیلس تکون کے قاعدے کے متوازی کھینچا جائے۔ تو اس سے عموماً باقی دو ضلعوں کے ساتھ ایک اور آئیسوسیلس تکون بن جائیگی +

۷- ک اش ۵ میں ف غ کا جوڑ ب ج کا متوازی ہوگا +

۸- ثابت کرو- کہ چھ برابر رگیولر تکون ایک مشترک راس کے گرد اس طرح رکھی جا سکتی ہیں۔ کہ اُن سے ایک رگیولر ہکسیگن بن جائے +

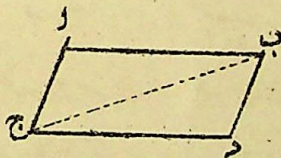
۹- ثابت کرو- کہ چار کانگروئنٹ قائم الزاویہ آئیسوسیلس تکون اس طرح ایک مشترک راس کے گرد رکھی جا سکتی ہیں۔ کہ اُن سے ایک مربع بن جائے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۳ ۔ مسئلہ

جو خط مستقیم دو برابر اور متوازی مستقیم خطوں کے ایک ایک طرف کے سروں کو ملائیں۔ وہ خود بھی برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔

فرض کرو اب اور ج د برابر اور متوازی خط مستقیم ہیں۔ اور ان کے ایک ایک طرف کے سروں کو خطوط مستقیم اج ب د ملاتے ہیں۔ تو اج اور ب د بھی برابر اور متوازی ہونگے۔

ا ب ج د

ب ج کو ملاؤ۔

∵ اب ج د کا || ہے۔ [فرض

∴ اب ج = متبادلہ ب ج د [ک ا ش ۲۹

اور نیز △ اب ج دج ب میں

اب ب ج = ج د ج ب

∴ اج = ب د [ک ا ش ۴

اور اج ب = ج ب د [ک ا ش ۴

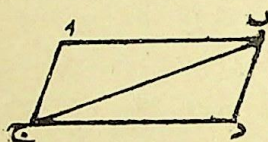
∴ اج ب د کا || ہوگا۔ [ک ا ش ۲۷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۴ مسئلہ

متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور زاوئیے باہم برابر ہوتے ہیں۔ اور وتر اُس کی تنصیف کرتا ہے۔

فرض کرو ا ج د ب ایک ▱ ہے۔ جس کا وتر ب ج ہے۔

تو اس شکل کے مقابل کے ضلعے اور زاویے باہم برابر ہونگے۔ اور وتر ب ج اُس کی تنصیف کریگا۔

ا ب ج = متبادلہ ب ج د
اور ا ج ب = متبادلہ ج ب د

[ک اش ۲۹

اور ب ج دو △ ا ج ب د ج ب میں مشترک ہے۔ اور ان کے برابر زاویوں کے متصل ہے۔

∴ ا ب = ج د
ا ج = ب د
ب ا ج = ب د ج
اور △ ا ب ج = △ ب ج د

[ثبوت ک اش ۲۶

(یعنی ب ج نے ▱ کی تنصیف کر دی)

اسی طرح اگر ا د کو ملایا جائے۔ تو ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ا ب د = ا ج د
اور △ ا ب د = △ ا ج د

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مثالیں

۱- اگر کسی چوکور کے مقابل کے ضلعے برابر ہوں- تو وہ متوازی الاضلاع ہوگی +

۲- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں +

۳- اگر کسی چوکور کے دونو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں - تو وہ متوازی الاضلاع ہوگی +

۴- تکون کے دو ضلعوں کے نقاط تنصیف کا جوڑ اس کے قاعدے کے متوازی ہوتا ہے- اور قاعدے کے نصف کے برابر ہوتا ہے +

۵- اگر تکون کے کسی ضلع کے نقطۂ تنصیف سے دوسرے ضلع کا متوازی خط کھینچا جائے- تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا +

۶- تکون کا ہر ایک میڈین اُس کے رقبے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے +

۷- اگر کسی تکون ا ب ج کے میڈین ا د پر (یا ا د کو بڑھا کر اس پر) کوئی نقطہ غ لیا جائے- تو تکونیں ا غ ب اور ا غ ج مساوی ہونگی +

تع- جب دو فگر رقبے میں برابر ہونگی- تو ہم انہیں اکثر مساوی کہینگے- یہ ضرور نہیں- کہ مساوی فگر کانگروئنٹ بھی ہوں +

۸- تکون ا ب ج کے دو میڈین ا د اور ب ی غ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں- ثابت کرو- کہ تکون ب غ ج تکون ا ب ج کی تہائی کے برابر ہے +

اس سے یہ بھی ثابت کرو- کہ تیسرا میڈین ج ف غ پر سے گزریگا +

تع- جب کئی خطوط مستقیم ایک ہی نقطے پر سے گزریں- تو انہیں کانکرنٹ (Concurrent) کہتے ہیں +

پس تکون کے تینوں میڈین کانکرنٹ ہوتے ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۵ - مسئلہ

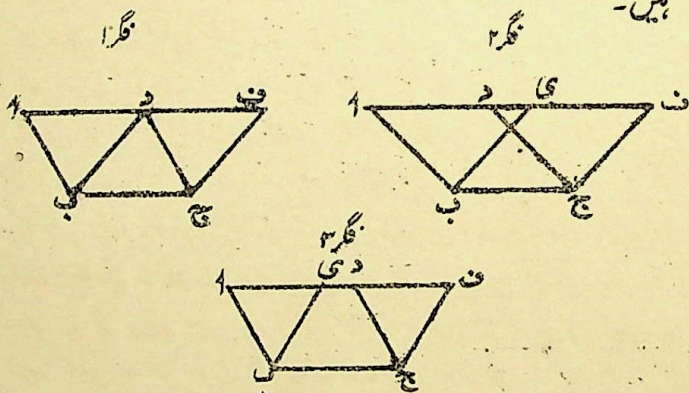
جو متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہوں - وہ باہم مساوی ہوتی ہیں۔

فرض کرو ▱ اب ج د ی ب ج ف ایک ہی قاعدے ب ج پر ایک ہی متوازی خطوں اف اور ب ج کے درمیان واقع ہیں۔

شکل ۱

شکل ۲

ا د ی ف
ب ج

شکل ۳

تو اب ج د ی ب ج ف کے مساوی ہوگی۔

اگر ضلعے اد ی ف ایک ہی نقطہ د پر ختم ہوں۔

(یعنی د ی پر منطبق ہوتا ہے - شکل ۱) ظاہر ہے ہر ایک ▱ △ ب د ج کا دو چند ہے۔ [ک اش ۳۴

∴ وہ مساوی ہیں۔ [علم ۶

لیکن اگر ضلعے اد ی ف ایک ہی نقطے پر ختم نہ ہوں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ٭ ا ب ج د ▱ ہے۔ [ک اش ۳۴

∴ ا د = ب ج

اسی طرح ہی ف = ب ج

∴ ا د = ی ف [علم ۱

∴ کل یا باقی ا ی = کل یا باقی د ف [علم ۲ و ۳

اور ا ب = د ج

اور بیرونی ف د ج = مقابل کے اندرونی ی ا ب [ک اش ۲۹

∴ △ ی ا ب = △ ف د ج [ک اش ۴

اگر نگر ا ب ج ف میں سے △ ی ا ب نکالی جائے۔ تو

▱ ی ب ج ف رہ جائیگی۔

اور اگر اسی نگر میں سے △ ف د ج نکالی جائے۔ تو

▱ ا ب ج د رہ جائیگی۔

∴ ▱ ا ب ج د = ▱ ی ب ج ف [علم ۳

نوٹ

اس نگر سے ظاہر ہوگا۔ کہ دو ایسی مساوی متوازی الاضلاعیں کس طرح کانگروئنٹ حصوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں۔ یہاں ہر ایک متوازی الاضلاع دوسری متوازی الاضلاع کے خطوں کے متوازی خطوں سے تقسیم ہوئی ہے۔

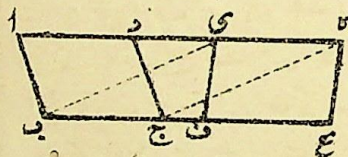
تع۔ اگر کسی نگر کے کسی راس سے مقابل کے ضلع کو قاعدہ مانکر اس پر عمود ڈالا جائے۔ تو یہ عمود اس قاعدہ کے لحاظ سے نگر کا ارتفاع کہلائیگا۔ پس جب دو تکون یا دو متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہونگے۔ تو ان کے ارتفاع برابر ہونگے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۶ - مسئلہ

جو متوازی الاضلاع برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہوں۔ وہ باہم مساوی ہوتی ہیں۔

فرض کرو اب ج د ی ف غ ہ ▱ برابر قاعدوں ب ج ف غ پر اور ایک ہی || خطوں اہ ب غ کے درمیان واقع ہیں۔

تو اب ج د ی ف غ ہ کے برابر ہوگی۔

ب ی اور ج ہ کو ملاؤ۔

∵ ب ج = ف غ [فرض

اور ف غ = ی ہ [علم ا

∴ ب ج = ی ہ [فرض

اور یہ متوازی بھی ہیں۔

∴ ب ی اور ج ہ برابر بھی ہیں اور متوازی بھی ہیں۔ [ک اش ۳۳

∴ ی ب ج ہ ▱ ہے۔ [تع ۲۱

▱ ا ب ج د اور ▱ ی ب ج ہ ایک ہی قاعدے ب ج پر اور ایک ہی || خطوں کے درمیان واقع ہیں۔

∴ وہ مساوی ہیں۔ [ک اش ۳۵

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

▱گ ی ف غ ہ اور ▱گ ی ب ج ہ ایک ہی قاعدے ی ہ پر
اور ایک ہی || خطوں کے درمیان واقع ہیں۔

∴ وہ مساوی ہیں۔ [ک اش ۳۵

∴ ▱گ ا ب ج د = ▱گ ی ف غ ہ [علم ۱

نوٹ

اس شکل سے ظاہر ہو جائیگا۔ کہ دو ایسے متوازی الاضلاع کا نگروئنٹ حصّوں میں کس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں+

مثالیں

۱۔ اگر کسی خط سے کسی دیئے ہوئے فاصلے پر کوئی نقطہ واقع ہو۔ تو اس نقطے کا لوکس دو متوازی خط ہونگے۔ جو دیئے ہوئے خط کی مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں+

۲۔ ایک ایسے نقطے کا لوکس معلوم کرو۔ جو دیئے ہوئے متوازی خطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو+

واضح ہو۔ کہ یہ لوکس ایک خط ہے۔ جس کا مقام آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔ لیکن ایسے موقع پر ہمیشہ ثابت کرنا چاہئے۔ کہ

(۱) اس خط کا کوئی سا نقطہ متوازی خطوں سے برابر فاصلے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پر واقع ہے۔

(۲) متوازی خطوں سے برابر فاصلے پر کا ہر ایک نقطہ اس خط پر واقع ہوگا۔

۳- کسی دیئے ہوئے خط پر ایسے نقطے معلوم کرو۔ جو ایک اور دیئے ہوئے خط سے دیئے ہوئے فاصلے پر واقع ہوں۔

ممکن ہے۔ کہ ایسا نقطہ کوئی بھی نہ ہو۔ لیکن اگر ایک ہوگا۔ تو دوسرا بھی ضرور ہوگا۔

۴- دیئے ہوئے دائرے پر ایسے نقطے معلوم کرو۔ جو کسی دیئے ہوئے خط سے خاص فاصلے پر ہوں۔

اوپر کی شرط کے موافق ایک دو تین یا چار نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔ ممکن ہے۔ کہ کسی خاص حالت میں ایک نقطہ بھی ایسا نہ ہو۔

ایسے سوالات میں طالب علموں کو چاہیئے۔ کہ یہ بتائیں۔ کہ ان کا حل کتنی مختلف طرح ہو سکتا ہے۔ اور کونسی حالت میں حل ناممکن ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۷ - مسئلہ

جو تکونیں ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہوں - وہ باہم برابر ہوتی ہیں -

فرض کرو △ اب ج د ب ج ایک ہی قاعدے ب ج پر

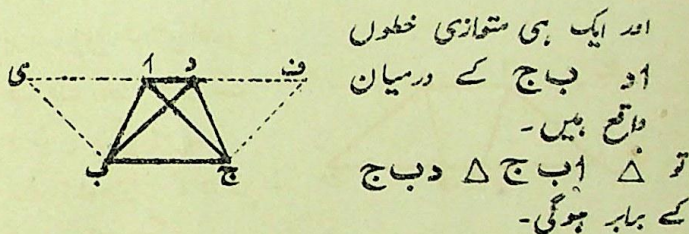
اور ایک ہی متوازی خطوں

اد ب ج کے درمیان

واقع ہیں -

ی ا د ف ب ج

تو △ اب ج △ د ب ج

کے برابر ہوگی -

اد کو دونوں طرف نقطوں ی ف تک بڑھاؤ - [اصل ۲

اور نقطوں ب اور ج پر سے ب ی اور ج ف متوازی ج ا

اور ب د کے بترتیب کھینچو - [ک اش ۳۱

تو ی ب ج ا اور د ب ج ف ▱ ہیں -

اور ▱ ی ب ج ا = ▱ د ب ج ف [ک اش ۳۵

اب △ اب ج ▱ ی ب ج ا کا نصف ہے - [ک اش ۳۴

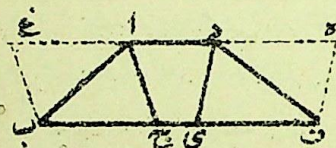
اور △ د ب ج ▱ د ب ج ف کا نصف ہے - [ک اش ۳۴

∴ △ اب ج = △ د ب ج [علم ۷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۵۳ مسئلہ

جو تکونیں برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہوں۔ وہ باہم مساوی ہوتی ہیں۔

فرض کرو △ ا ب ج اور دی ف برابر قاعدوں ب ج اور ی ف پر ایک ہی متوازی خطوں ب ف اور ا د کے درمیان واقع ہیں۔

تو △ ا ب ج △ دی ف کے مساوی ہوگی

ا د کو دونو طرف نقطوں غ ہ تک بڑھاؤ۔ [اصل ۲

اور ب اور ف پر سے ب غ اور ف ہ متوازی ج ا اور ی د کے ترتیب کھینچو۔ [م اش ۳۱

تو غ ب ج ا اور دی ف ہ ▱ ہیں۔

اور ▱ غ ب ج ا = ▱ دی ف ہ [ک اش ۳۶

اب △ ا ب ج اور دی ف ▱ غ ب ج ا اور دی ف ہ کے ترتیب نصف ہیں۔ [م اش ۳۴

∴ △ ا ب ج = △ دی ف [علم ۷

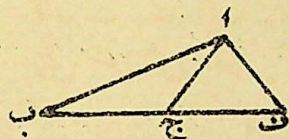
مثالیں

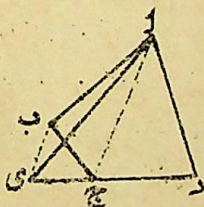
۱۔ تکون کا میڈین اس کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(دیکھو شکل ۴۴ کی مثال ۲ دیکھو)

۲- اگر دو مثلثوں میں ایک کے دو ضلعے دوسری کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں۔ اور اُن ضلعوں کے درمیانی زاویے ایک دوسرے کے سپلیمینٹری ہوں۔ تو مثلثیں مساوی ہونگی۔

دو مثلثوں کو اس طرح پاس پاس رکھنے سے کہ ضلع اج دونو میں مشترک ہوجائے۔ اور ایک کا زاویہ اج ف دوسرے کے زاویے اج ب کے متصل رہے۔ ب ف ایک خطِ مستقیم بن جائیگا۔ اور مثلثوں کا مساوی ہونا صاف ظاہر ہوجائیگا۔

۳- دی ہوئی چوکور اب ج د کے مساوی مثلث بناؤ۔

حل

اج کو ملاؤ۔ اور ب پر سے اج کا متوازی ب ی کھینچو کہ د ج کو بڑھانے سے ی پر ملے۔ ا ی د مثلث مطلوبہ ہوگی۔

اسی طرح کسی دی ہوئی شکل کے مساوی دوسری شکل بنائی جا سکتی ہے۔ جس کے ضلعوں کی تعداد دی ہوئی شکل کے ضلعوں کی تعداد سے ایک کم ہو۔

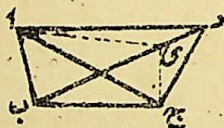
اسی طرح رفتہ رفتہ ضلعوں کی تعداد کم کرتے کرتے اس شکل کے مساوی مثلث بنائی جا سکتی ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۹ - مسئلہ

جو مساوی مثلثیں ایک ہی قاعدے پر اور اُس قاعدے کے ایک ہی طرف واقع ہوں - وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگی -

فرض کرو مساوی △ ا ب ج اور د ب ج ایک ہی قاعدے ب ج پر اور اُس کے ایک ہی طرف واقع ہیں - تو وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگی -

ا د کو ملاؤ -

ا د ب ج کا متوازی ہوگا -

کیونکہ اگر نہ ہو - تو ا پر سے ا ی ب ج کا متوازی کھینچو - جو ب د سے ی پر ملے - [ک اش ۳۱

اور ی ج کو ملاؤ -

تو △ ا ب ج = △ ی ب ج [ک اش ۳۷

لیکن △ ا ب ج = △ د ب ج [فرض

∴ △ د ب ج = △ ی ب ج [علم ۱

اور یہ ناممکن ہے -

∴ ا ی ب ج کا متوازی نہیں ہے -

اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ نقطہ ا پر سے ب ج کا [illegible]ی ا د کے سوا اور کوئی خط نہیں کھنچ سکتا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

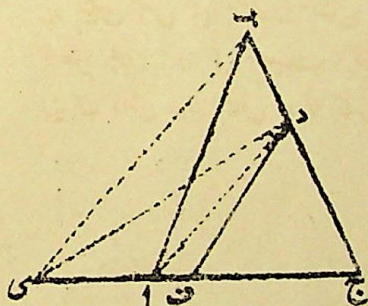
(کیونکہ شکل ۳۱ میں ثابت ہو چکا ہے۔ کہ ا پر سے ب ج کا متوازی ایک خط ضرور کھینچا جا سکتا ہے) +

مثالیں

۱۔ ایک چوکور کے کسی دیئے ہوئے راس سے خط کھینچ کر چوکور کی تنصیف کرو۔

چوکور کے مساوی تکون بنا کر تکون کا میڈین کھینچنے سے یہ شکل حل ہو جائیگی (کہ اش ۲۸ مثال ۲ دیکھو) +

۲۔ تکون کے کسی ضلع پر ایک نقطہ دیا ہوا ہے۔ اس نقطے سے خط کھینچکر تکون کی تنصیف کرو۔

حل

اب ج △ ہے۔ اور د دیا ہوا نقطہ ہے۔ اوپر لکھے ہوئے طریقے سے △ دی ج △ اب ج کے مساوی بناؤ۔ تو اس کا میڈین د ف △ اب ج کی تنصیف کریگا +

۳۔ ایک دیئے ہوئے قاعدے پر ایک تکون واقع ہے۔ جس کا رقبہ بھی دیا ہوا ہے۔ تکون کے راس کا لوکس دو خط ہونگے۔ جو قاعدے کے متوازی ہیں۔ اور اس کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں +

(یہ کہ اش ۲۷ و ۲۹ کا حاصل ہے)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۴- ا ب ج اور د ی ف دو تکونیں ہیں- ن ایک ایسا نقطہ معلوم کرو- کہ △ ن ب ج ن ا ی ف ترتیب △ ا ب ج د ی ف کے مساوی ہوں ÷

حل

اگر ایسا نقطہ ہو سکتا ہے- تو وہ ایسی جگہ ہوگا- جہاں دو لوکس ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ÷

واضح ہو- کہ اگر ایک ایسا نقطہ ہونا ممکن ہو- تو تین اور بھی ایسے ہی نقطے ضرور ہونگے- اور خاص حالت میں ایسے نقطوں کی تعداد لا انتہا ہو سکتی ہے ÷

۵- اگر دو مساوی تکونیں ا ب ج د ب ج ایک ہی قاعدے ب ج پر لیکن اُس کی مخالف سمتوں میں واقع ہوں- تو ب ج دیا ب ج بڑھایا ہوا) ا د کی تنصیف کریگا-

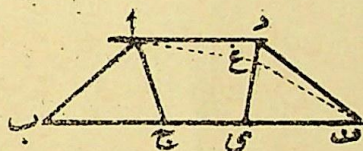
(یہ ک اش ۳۸ مثال ۷ کا عکس ہے) ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۰ - مسئلہ

جو مساوی تکونیں ایسے برابر قاعدوں پر کہ جو ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں - واقع ہوں - اور اس خط کے ایک ہی طرف ہوں - تو وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگی -

فرض کرو مساوی △ ا ب ج د ی ف برابر قاعدوں ب ج ی ف پر جو ایک ہی خطِ مستقیم ب ف میں ہیں - واقع ہیں - اور اس خط کے ایک ہی طرف ہیں -

تو وہ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہونگی -

ا د کو ملاؤ -

ا د ب ف کا || ہوگا -

کیونکہ اگر نہ ہو - تو ا پر سے ا غ ب ف کا || کھینچو - جو ی د سے غ پر ملے - [ک اش ۳۱

اور غ ف کو ملاؤ -

تو △ ا ب ج = △ غ ی ف [ک اش ۳۸

لیکن △ ا ب ج = △ د ی ف [فرض

∴ △ د ی ف = △ غ ی ف [علم ۱

اور یہ ناممکن ہے -

∴ ا غ ب ف کا || نہیں -

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ ا پر سے ب ف کا || ا د کے سوا اور کوئی خطِ مستقیم نہیں کھنچ سکتا -

∴ ا د ب ف کا || ہے ◆

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

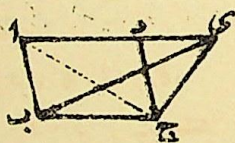
شکل ۴۱ - مسئلہ

اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک تکون ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان واقع ہوں۔ تو متوازی الاضلاع تکون سے دوچند ہوگی۔

فرض کرو ▱ ا ب ج د اور △ ی ب ج ایک ہی قاعدے ب ج پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب ج ا ی کے درمیان واقع ہیں۔

تو ▱ ا ب ج د △ ی ب ج سے دوچند ہوگی۔

ا ج کو ملاؤ۔

تو △ ا ب ج = △ ی ب ج [ک اش ۳۷

لیکن ▱ ا ب ج د △ ا ب ج کا دوچند ہے۔ [ک اش ۳۴

∴ ▱ ا ب ج د △ ی ب ج کا بھی دوچند ہے

مثالیں

۱- اگر دو مساوی تکونیں ا ب ج د ی ف برابر قاعدوں ب ج ی ف پر جو ایک ہی خط مستقیم ب ف میں ہیں۔ واقع ہوں۔ اور اس خط کی مخالف سمتوں پر ہوں۔ تو ب ف خط ا د کی تنصیف کریگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲- خط ب ف ایک دیئے ہوئے خط اد کی تنصیف کرتا ہے - اور
ب ف میں ب ج ی ف کوئی سے دو برابر ٹکڑے لیئے گئے ہیں-
ثابت کرو- کہ مثلثیں اب ج اور دی ف مساوی ہیں +

۳- دو نقطے دیئے ہوئے ہیں- خطوں کا ایک ایسا سٹ معلوم کرو-
کہ اگر ان خطوں میں سے کسی ایک پر ایک خاص ٹکڑا لے کر
اس ٹکڑے کے سروں کو دو دیئے ہوئے نقطوں سے ملا دیں-
تو دو مساوی مثلثیں بن جائیں-

واضح ہو- کہ ایسے دو سٹ معلوم ہو سکتے ہیں - ایک متوازی
خطوں کی پنسل - اور دوسری کانکرنٹ خطوں کی پنسل +

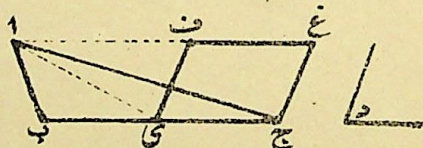
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۲ - سوال

ایک ایسی متوازی الاضلاع بناؤ - جو ایک دی ہوئی تکون کے مساوی ہو - اور جس کا ایک زاویہ دئے ہوئے زاوئے کے برابر ہو۔

فرض کرو ا ب ج دی ہوئی △ ہے - اور د دیا ہوا زاویہ -

چاہتے ہیں - کہ ایک ایسی متوازی الاضلاع بنائیں - جو دی ہوئی △ ا ب ج کے مساوی ہو - اور جس کا ایک زاویہ د کے برابر ہو -

ب ج کی ی پر تنصیف کرو - [ک اش ۱۰

اور خط مستقیم ی ج کے نقطہ ی پر $\hat{د}$ کے برابر ج ی ف بناؤ - [ک اش ۲۳

ا پر سے ی ج کے ‖ ا ف غ کھینچو -
اور ج پر سے ی ف کے ‖ ج غ کھینچو - } [ک اش ۳۱

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ▯ ف ی ج غ = △ ا ب ج

ا ی کو ملاؤ۔

تو ب ی = ی ج [عمل

∴ △ ا ب ی = △ ا ی ج [ک اش ۳۸

∴ △ ا ب ج △ ا ی ج کا دوچند ہے۔

لیکن ▯ ف ی ج غ بھی △ ا ی ج کا دوچند ہے۔ [ک اش ۴۱

∴ ▯ ف ی ج غ = △ ا ب ج [علم ۱

اور اس کا ج ی ف دیئے ہوئے د کے برابر ہے۔ [عمل

نوٹ

جب دیا ہوا زاویہ د قائمہ ہوگا۔ تو متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ہوگی +

پہلے ک اش ۴۳ مثال ۳ میں بتایا گیا ہے۔ کہ کسی مستقیم الخطوط شکل کے مساوی مثلث بنا سکتے ہیں۔ پس کسی مستقیم الخطوط شکل کے مساوی قائم الزاویہ متوازی الاضلاع بھی بنا سکتے ہیں +

مثالیں

۱۔ کسی متوازی الاضلاع کے مساوی ایک مثلث بناؤ۔ جس کا زاویہ دیئے ہوئے زاویئے کے برابر ہو +

۲۔ کسی چوکور کے ہر ایک وتر کے سروں سے دوسرے وتر کے متوازی خط کھینچکر ایک متوازی الاضلاع بنائی گئی ہے۔ ثابت

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

گرد - کہ یہ متوازی الاضلاع دی ہوئی چوکور سے دوچند ہے +
تع - جب کسی مستقیم الخطوط فگر کے راس کسی دوسری مستقیم الخطوط فگر کے ضلعوں پر واقع ہوں - تو کہا کرتے ہیں - کہ پہلی فگر دوسری کے اندر بنائی گئی ہے - اور دوسری پہلی کے گرد بنائی گئی ہے +

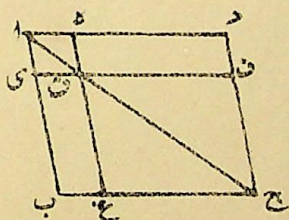
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تع - جب کسی متوازی الاضلاع کے وتر پر کوئی نقطہ لیکر اس پر سے متوازی الاضلاع کے ضلعوں کے متوازی دو خط کھینچے جائیں - تو ان سے دو متوازی الاضلاع ایسی بن جائینگی - جن میں سے وتر گزریگا - انہیں ہم وتر کے گرد کی متوازی الاضلاع کہینگے - ان کے سوا دو اور متوازی الاضلاع بن جائینگی - جن سے یہ متوازی الاضلاع تمام ہو جاتی ہے - انہیں ہم متمم کہتے ہیں*

شکل ۴۳ - مسئلہ

جو متوازی الاضلاع کسی متوازی الاضلاع کے قطر کے گرد ہوں - ان کے متمم آپس میں مساوی ہوتے ہیں -

فرض کرو ا ب ج د ایک ▱ ہے - جس کا قطر ا ج ہے - اور

ی ہ اور غ ف ▱ ا ج کے گرد ہیں - اور ب ق اور ق د باقی دو ▱ ان کے متمم ہیں -

تو ب ق ق د کے برابر ہوگا -

∵ ا ج ▱ ا ب ج د کا قطر ہے -

[ک اش ۴۴

∴ △ ا ب ج = △ ا د ج

اسی طرح △ ای ق = △ ا ہ ق

اور △ ق غ ج = △ ق ف ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ △ ای ق قنج مل = △ اہ ق اور ق ف ج [علم ۲

لیکن کل △ ا ب ج = کل △ ا د ج

∴ باقی متمم ب ق = باقی متمم ق د [علم ۳

مثالیں

۱۔ اگر کسی متوازی الاضلاع ا ب ج د کے ضلعوں ا ب اور ا د کے متوازی دو خط ہ غ اور ی ف ایسے کھینچے جائیں۔ کہ متوازی الاضلاع ی غ اور ہ ف مساوی ہوں۔ تو ثابت کرو۔ کہ نقطہ ق جہاں وہ دونو متوازی خط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ متوازی الاضلاع کے وتر پر ہوگا +

۲۔ اگر وتر کے گرد کے متوازی الاضلاع مساوی ہوں۔ اور متمم بھی مساوی ہوں۔ تو بتاؤ۔ نقطہ ق کہاں ہوگا +

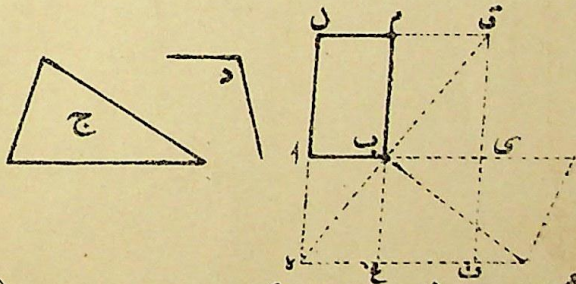
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۴ سوال

ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم پر ایسی متوازی الاضلاع بناؤ۔ جو دی ہوئی تکون کے مساوی ہو۔ اور جس کا کوئی ایک زاویہ دئے ہوئے زاویئے کے برابر ہو۔

فرض کرو اب دیا ہوا خط ہے۔ ج دی ہوئی △ اور د دیا ہوا زاویہ۔

چاہتے ہیں۔ کہ خطِ مستقیم اب پر ایسی ▱ بنائیں۔ جو △ ج کے مساوی ہو۔ اور جس کا ایک زاویہ د̂ کے برابر ہو۔

ایک ▱ ب ی ف غ جو △ ج کے مساوی ہو اور جس کا ی ب غ د̂ کے برابر ہو۔ بناؤ۔ [ک اش ۴۲

اور ب ی ف غ کو اس طرح رکھو۔ کہ ضلع ب ی خط اب کی سیدھ میں ہو۔

ف غ کو ہ تک بڑھاؤ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا پر سے ا ہ ب غ یا ی ف کا || کھینچو۔ [ک اش ۳۱
اور ہ ب کو ملاؤ۔
تو پہ ا ہ ی ف کا || ہے۔

∴ دونوں اندرونی ا ہ ف اور ہ ف ی ملکر = دو قائموں [ک اش ۲۹

∴ ب ہ ف اور ہ ف ی ملکر < دو قائموں

∴ ہ ب اور ف ی ب اور ی کی طرف بڑھانے سے ملجائینگے [اتعلم ۱۲

فرض کرو۔ کہ وہ ق پر ملتے ہیں۔ ق پر سے ق ل ی ا یا
ف ہ کا متوازی کھینچو۔ [ک اش ۳۱

اور ہ ا اور غ ب کو بڑھاؤ۔ کہ ق ل سے ل اور م پر ملیں۔
تو ہ ل ق ف ▯ ہے۔ جس کا قطر ہ ق ہے۔

∴ متمم ل ب = متمم ب ف [ک اش ۴۳

لیکن ب ف = △ ج [عمل

∴ ب ل = △ ج [علم ۱

پھر ا ب م = غ ب ی [ک اش ۱۵

= د̂ [عمل

∴ دئے ہوئے خطِ مستقیم ا ب پر ▯ ل ب بن گئی جو △ ج کے
مساوی ہے۔ اور جس کا ا ب م د̂ کے برابر ہے +

تنبیہ۔ عمل کی صحت کے لئے طالب علم کو چاہئے۔ کہ ایک △ ج کے
مساوی اس طرح بناوے۔ کہ اس کا ایک ضلع ا ب کی سیدھ
میں ہو۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۵ - سوال

ایک ایسی متوازی الاضلاع بناؤ - جو دی ہوئی مستقیم الخطوط
فگر کے مساوی ہو - اور جس کا کوئی ایک زاویہ دیئے
ہوئے زاویے کے برابر ہو -

فرض کرو اب ج د دی ہوئی مستقیم الخطوط فگر ہے - اور ی
دیا ہوا زاویہ -

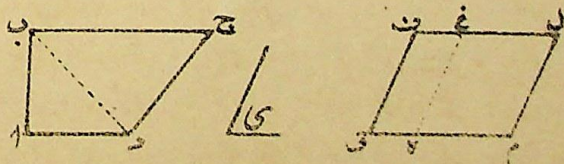
چاہتے ہیں - کہ ایک ایسی ▱ بنائیں جو اب ج د کے مساوی ہو -
اور جس کا ایک زاویہ ی کے برابر ہو -

د ب کو ملاؤ -

ایسی ▱ ف ہ بناؤ - جو △ ادب کے مساوی ہو - اور جس کا
ف ق ہ ی کے برابر ہو - [ک اش ۴۲

خط مستقیم غ ہ پر ایک ایسی ▱ غ م بناؤ - جو △ دبج کے
مساوی ہو - اور جس کا غ ہ م ی کے برابر ہو - [ک اش ۴۴
تو ف ق م ل ▱ مطلوبہ ہوگی -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∵ ∠ف ق ہ ∠غ ہ م میں سے ہر ایک = ∠ی [عمل

∴ ∠ف ق ہ = ∠غ ہ م [علم ۱

∴ ∠ف ق ہ ∠ق ہ غ = ∠غ ہ م ∠ق ہ غ [علم ۲

لیکن ∠ف ق ہ ∠ق ہ غ ملکر = دو قائموں۔ [ک ۱ ش ۲۹

∴ ∠ق ہ غ ∠غ ہ م ملکر = دو قائموں۔

∴ ق ہ ہ م کی سیدھ میں ہے۔ [ک ۱ ش ۱۴

اور نیز غ ل ف غ کی سیدھ میں ہے۔

ورنہ دو خطِ مستقیم ف غ غ ل جو ایک ہی خطِ مستقیم ق م کے || ہیں۔ غ پر ملینگے۔ [ک ۱ ش ۳۰

اور یہ ناممکن ہے۔ [ک ۱ ش ۱۴

اب ∵ ق ف ہ غ کا || ہے۔ اور ہ غ م ل کا || ہے [عمل

∴ ق ف م ل کا || ہے۔ [ک ۱ ش ۳۰

اور ق م اور ف ل || ہیں۔

∴ ق ف ل م ▱ ہے۔ [تع ۲۱

اور ∵ △ ا ب د = ▱ ہ ف [عمل

اور △ ب د ج = ▱ غ م [عمل

∴ کل مستقیم الخطوط شکل ا ب ج د = کل ▱ ق ف ل م [علم ۲

∴ ▱ ق ف ل م ایسی بن گئی۔ جو مستقیم الخطوط شکل ا ب ج د کے مساوی ہے۔ اور جس کا ∠ف ق م ∠ی کے برابر ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

حاصل

اس سے ظاہر ہے۔ کہ کسی دئے ہوئے خط کے اوپر بھی ایک متوازی الاضلاع بنائی جا سکتی ہے۔ جو کسی دی ہوئی مستقیم الخطوط فگر کے مساوی ہو۔ اور جس کا کوئی ایک زاویہ دئے ہوئے زاوئے کے برابر ہو ∴

دی ہوئی مستقیم الخطوط فگر کو تکونوں میں تقسیم کرکے دئے ہوئے خط پر پہلے ایک تکون کے مساوی ایک ایسی متوازی الاضلاع بناؤ۔ جس کا کوئی ایک زاویہ دئے ہوئے زاوئے کے برابر ہو۔ [ک اش ۴۴

اور پھر اس متوازی الاضلاع کے ضلع پر دوسری تکون کے مساوی اور ایک متوازی الاضلاع بناؤ۔ علےٰ ہذا ∴

نوٹ

۱ یہ شکل اس طرح آسانی سے حل ہو سکتی ہے۔

ک اش ۳۸ مثال ۲ کی رُو سے مستقیم الخطوط فگر کے مساوی تکون بناؤ۔

اب اس تکون کے مساوی ایک متوازی الاضلاع بناؤ۔ [ک اش ۴۲

۲ اس شکل کے حل میں ہمیشہ یہ ضرور نہیں ہے۔ کہ فگر مستقیم الخطوط کو تکونوں میں تقسیم کیا جائے ∴

مثال

دی ہوئی مستقیم الخطوط فگر کے مساوی قائم الزوایا بناؤ۔
(یہاں متوازی الاضلاع کا زاویہ قائمے کے برابر ہے) ∴

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۶ - سوال

دیئے ہوئے خط مستقیم پر مربّع بناؤ۔

فرض کرو اب دیا ہوا خطِ مستقیم ہے۔
چاہتے ہیں۔ کہ اب پر مربّع بنائیں۔

ج
د ی
ا ب

نقطہ ا سے اج اب پر عمود کھینچو۔ [ک اش ۱۱
اور اد اب کے برابر بناؤ۔ [ک اش ۳
د پر سے دی اب کا || کھینچو
اور ب پر سے ب ی اد کا || کھینچو } [ک اش ۳۱
ا د ی ب مربّع ہوگا۔
اب ا د ی ب ▱ ہے [عمل
∴ اب = دی اور اد = ب ی [ک اش ۳۴
لیکن اب = اد [عمل
∴ چاروں خط مستقیم ب ا اد دی ی ب آپس میں برابر ہیں۔ (علم ۱

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پھر ب دی ا ب کا متوازی ہے۔

∴ دونو اندرونی ب ا د ا د ی مکر = دو قائموں [ک ا ش ۲۹

لیکن ب ا د قائمہ ہے۔ [عمل

∴ ا د ی بھی قائمہ ہے۔ [علم ۳

∴ مقابل کے ا ب ی اور ب ی د میں سے ہر ایک قائمہ ہے [ک ا ش ۳۴

∴ ا د ی ب قائم الزوایا ہے۔

اور یہ ایکوی لیٹرل ثابت ہو چکی ہے۔

∴ یہ مربع ہے۔ اور دئے ہوئے خط مستقیم ا ب پر بن گیا ہے۔

حاصل

پس جس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔ اُس کے تمام زاویئے قائمے ہوتے ہیں۔

تبع۔ ایسی متوازی الاضلاع کو قائم الزوایا کہتے ہیں۔

مثال

ایک دئے ہوئے خط پر ایک ایسا رامبس بناؤ۔ جس کا کوئی ایک زاویہ دئے ہوئے زاویئے کے برابر ہو۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۷ - مسئلہ

ہر ایک قائم الزاویہ تکون میں اُس ضلع پر کا مربّع جو قائمے کے مقابل ہے - اُن ضلعوں پر کے مربّعوں کے مساوی ہوتا ہے - جن کے درمیان زاویہ قائمہ ہے -

فرض کرو ا ب ج ایک △ قائم الزاویہ ہے - جس کا ب ا ج قائمہ ہے -

ب ج پر کا مربّع ب ا اور ا ج پر کے مربّعوں کے مساوی ہوگا -

ب ج ج ا ا ب پر بترتیب مربعے ب د ی ج ج ق ک ا ا غ ف ب بناؤ - [ک ا ش ۴۶

ا پر سے ا ل ب د یا ج ی کا || کھینچو - [ک ا ش ۳۱

ا د اور ف ج کو ملاؤ -

∵ ب ا ج قائمہ ہے - [فرض

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور ب ا غ بھی قائمہ ہے - [عمل

∴ ج ا اور ا غ ایک سیدھ میں ہیں - [ک ا ش ۱۴

اب قائمہ د ب ج = قائمہ ف ب ا [علم ۱۱

∴ کل د ب ا = کل ف ب ج [علم ۲

پس △ ا ب د اور ف ب ج میں

اب ب د = ف ب ب ج اپنی اپنی نظیر کے - [تع ۲۲

اور د ب ا = ف ب ج

∴ △ ا ب د = △ ف ب ج [ک ا ش ۴

اب ▱ ب ل △ ا ب د کا دو چند ہے - [ک ا ش ۴۱

اور مربع غ ب △ ف ب ج کا دو چند ہے - [ک ا ش ۴۱

∴ ▱ ب ل = مربع غ ب [علم ۶

اسی طرح ا ی اور ب ق کو ملانے سے ثابت ہو سکتا ہے - کہ

▱ ج ل = مربع ج ہ

∴ کل مربع ب د ی ج = دو مربعوں غ ب اور ہ ج [علم ۲

یعنی ب ج پر کا مربع = ب ا اور ا ج پر کے مربعوں ٭

تع - قائم الزاویہ مثلث میں زاویئے قائمے کے مقابل کے ضلع کو وتر کہتے ہیں - اور باقی دو ضلعے جن کے درمیان قائمہ ہے - ساق کہلاتے ہیں ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

حاصل ۱

قائم الزاویہ مثلث کی کسی ساق پر کا مربع اُس کے وتر اور دوسری ساق پر کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے +

حاصل ۲

اس شکل میں یہ بھی ثابت ہوگیا ہے - کہ قائم الزوایا ب ل = اب پر کے مربع کے اور ج ل = اج پر کے مربع کے +

پس ثابت ہو گیا - کہ اگر کسی قائم الزاویہ تکون میں زاویے قائمے سے قاعدے پر عمود ڈالا جائے - تو وہ قائم الزوایا جو وتر اور اُس کے ایک ٹکڑے سے بنتا ہے - اُس ساق پر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے - جو اُس ٹکڑے کے متصل ہے +

حاصل ۳

اگر قائم الزاویہ تکون کے ضلعوں پر اکوی لیٹرل تکون بنائی جائیں - تو وتر پر کا اکوی لیٹرل تکون ساقوں پر کے ضلعوں کے مجموعے کے مساوی ہوگا +

نوٹ

تکون کے ضلعوں کی مختلف سمتوں پر مربعے بنا کر اور اُن مربعوں کو کاٹ کر ایک دوسرے پر رکھ کر اس شکل کے بہت سے ثبوت دئے گئے ہیں - اُن میں سے چند جو قابل غور ہیں - نیچے لکھے جاتے ہیں +

مثالیں

۱ - مربعے اب ف غ اور اہ ق ج بناؤ - کہ ب ا اہ ایک سیدھ میں ہوں - اور ب ہ میں نقطہ م لو - اور اج کو بڑھا کر اس میں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

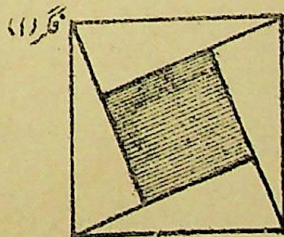
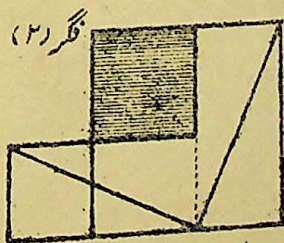
نقطہ ن لو - ک م لا ::

ج ن = اب

تو چاروں تکون ق ج ن
ف غ ن ف م ب اور
لا م ق کانگروئنٹ ہونگی +

اب کل نگر میں سے
پہلے دو تکون نکال دو - تو
قائم الزاویہ تکون اب ج
کی دو ساقوں پر کے مربّع
رہ جائینگے - اگر اسی نگر میں سے تیسری اور چوتھی تکون کو نکال
دیں - تو وتر پر کا مربّع رہ جائیگا ::

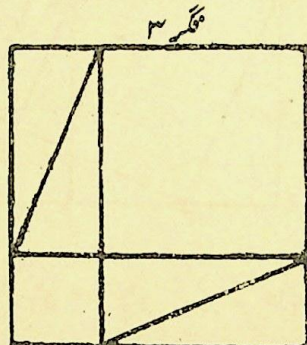
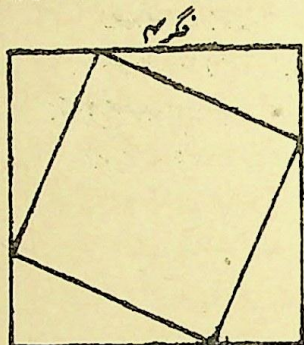
پورا ثبوت طالب علم خود کرے +

۲- دو ساقوں کے فرق کے مربّع کے گرد چار کانگروئنٹ قائم الزاویہ
تکونیں اس طرح رکھی جا سکتی ہیں - کہ یہ اُس مربّع کے ساتھ
ملکر وتر پر کا مربّع بناویں (دیکھو نگر ۱) +

اور وہی چاروں تکون اس طرح بھی رکھی جا سکتی ہیں - کہ یہ اسی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مربع کے ساتھ ملکر ساقوں پر کے مربعے بنا دیں۔ (دیکھو نگر ۲) +

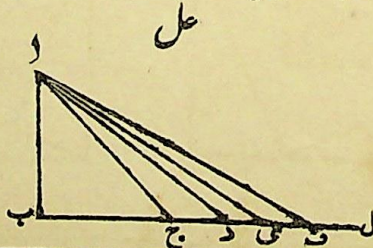
۳۔ دونو ساقوں کے مجموعے پر کے مربع میں سے چار کانگروئنٹ قائم الزاویہ مکون اس طرح نکال سکتے ہیں۔ کہ وتر پر مربع باقی رہ جاتا ہے۔ (دیکھو نگر ۳)۔

اور ان کو اسی مربع میں سے اس طرح بھی نکال سکتے ہیں۔ کہ دونو ساقوں پر کے مربعے باقی رہ جائیں۔ (دیکھو نگر ۴) +

طالب علم چاہے۔ تو کاغذ کے مقوے کاٹ کاٹ کر اپنا اطمینان کرسکتا ہے +

۴۔ ایک ایسا مربع بناؤ۔ جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے مربع سے دو چند۔ سہ چند۔ چہار چند وغیرہ .... ہو +

حل

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اب ل ایک زاویہ قائمہ بناؤ۔

بناؤ ب ج = اب

ب د = اج

ب ی = اد

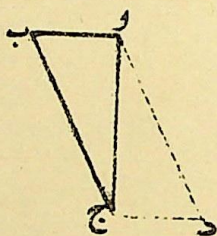
ب ف = ای وغیرہ

تو اج اد ای اف پر کے مربعوں کا رقبہ اب پر کے مربع کے رقبے سے دو چند۔سہ چند۔چہار چند وغیرہ ...... ہوگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴۸ - مسئلہ

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربّع باقی دو ضلعوں پر کے مربّعوں کے مساوی ہو۔ تو اُن دونو ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوگا۔

فرض کرو △ ا ب ج کے ایک ضلع ب ج پر کا مربّع باقی دو ضلعوں ب ا ا ج پر کے مربّعوں کے مساوی ہے۔

تو ب ا ج زاویہ قائمہ ہوگا۔

ج سے ا ج پر ج د عمود کھینچو۔ [ک ا ش ۱۱

اور ج د ا ب کے برابر بناؤ۔ [ک ا ش ۳

د ا کو ملاؤ۔

ا د پر کا مربّع = ج ا اور ج د پر کے مربّعوں [ک ا ش ۴۷

= ج ا اور ا ب پر کے مربّعوں ∵ ج د = ب ا

= ج ب پر کے مربّع [فرض

∴ ا د = ب ج

پھر ب ا = ج د [عمل

اور ا ج دونو △ ب ا ج د ا ج میں مشترک ہے۔

اور ب ج = ا د [ثبوت

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ب ا ج = د ج ا

لیکن د ج ا قائمہ ہے۔

∴ ب ا ج بھی قائمہ ہے +

نوٹ

یہ شکل ک اش ۷، ۴ کا عکس ہے۔اور اس عکس کو بھی اور عکسوں کی طرح اثبات خلفی سے ثابت کر سکتے ہیں +

مثالیں

۱۔ اگر دو خط برابر ہوں۔ تو اُن پر کے مربّعے بھی مساوی ہونگے۔اور اس کا عکس بھی درست ہے +

۲۔ دو کانگروئنٹ قائم الزوایوں کو مع اس مربّع کے جو اُن کے ضلعوں کے فرق پر بنایا گیا ہے۔ اس طرح رکھ سکتے ہیں۔کہ اُن کے دو ضلعوں پر کے مربّعے بن جائیں +

۳۔ دو کانگروئنٹ قائم الزوایوں کو مع اُن کے ضلعوں پر کے مربّعوں کے اس طرح رکھ سکتے ہیں۔کہ اُن سے دونو ضلعوں کے مجموعے پر کا مربّع بن جائے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تکونوں کی چند بڑی بڑی خاصیتیں

مثالیں

۱- جو تین مستقیم خط کسی تکون کے ضلعوں کی قائمے زاویوں پر تنصیف کریں۔ وہ تینوں خط ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں۔

اور یہ نقطہ تکون کے تینوں کونوں سے برابر فاصلے پر ہوتا ہے۔ چنانچہ ایک دائرہ اُس تکون کے گرد کونوں پر سے گزرتا ہؤا کھینچا جا سکتا ہے۔ جس کا مرکز یہ نقطہ ہو۔ اس لئے یہ نقطہ اس تکون کا سرکم سنٹر (Circumcentre) کہلاتا ہے ؛

۲- تین مستقیم خط جو کسی تکون کے اندرونی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں۔

معلوم ہوگا۔ کہ یہ نقطہ تینوں ضلعوں سے برابر فاصلے پر واقع ہے۔ اس لئے اُس دائرے کا مرکز ہے۔ جو تکون کے اندر اُس کے تینوں ضلعوں کو چھوتا ہؤا کھینچا جائے۔ اور اسی وجہ سے اسے اس تکون کا اِن سنٹر (Incentre) کہتے ہیں ؛

۳- اگر کسی تکون کے ایک اندرونی زاویئے اور دو بیرونی زاویوں کی تنصیف کرتے ہوئے خط کھینچے جائیں۔ تو وہ خط ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں ؛

۴- تکون کے تینوں میڈین ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں۔ یہ نقطہ ہر ایک میڈین کا نقطۂ تثلیث ہوگا۔ یعنی اُس پر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہر ایک میڈین تین برابر حصّوں میں تقسیم ہو جائیگا۔ اس نقطے کو تکون کا سنٹرائڈ (Centroid) کہتے ہیں +

۵۔کسی تکون کے تینوں کونوں سے جو تین عمود مقابل کے ضلعوں پر ڈالے جائیں (یعنی تکون کے تینوں ارتفاع) وہ ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں +

یہ نقطہ تکون کا آرتھو سنٹر (Orthocentre) کہلاتا ہے +
(ہر ایک کونے سے مقابل کے ضلع کا متوازی خط کھینچو۔ کہ ان سے اس تکون کے گرد ایک نئی تکون بن جائے۔ تو معلوم ہوگا۔ کہ تینوں عمود اس نئی تکون کے ضلعوں کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتے ہیں۔ اور اس لئے مثال ۱ کی رُو سے ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں) +

۶۔ اگر کسی تکون کے بیچ سے اس کے کسی ضلع کے متوازی خط کھینچا جائے۔ تو جو میڈین اس ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔ وہ اس خط کی بھی تنصیف کریگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

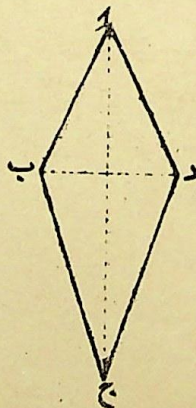
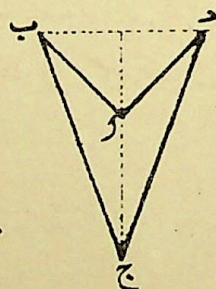
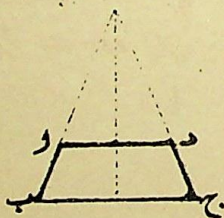
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چوکوروں کی خاصیتیں

اقلیدس کی کتابوں میں چوکور دو قسموں میں منقسم کی گئی ہیں۔
اوّل۔ متوازی الاضلاع جن میں مربع۔ رامبس۔ آبلانگ۔ رامبائڈ شامل ہیں +
دوم ٹریپیزیم۔ ٹریپیزیم کئی قسم کی ہوتی ہیں۔ لیکن ان کے الگ الگ نام نہیں رکھے گئے ہیں +

مگر کئی ٹریپیزیم ایسی ہیں۔ کہ اُن کی خاصیتیں خصوصاً معلوم کرنے کے قابل ہیں۔ اور اسی لئے اُن کے خاص نام بھی ہونے چاہئیں +

اوّل۔ مثلاً نمبر ۱ و ۲ میں ا ب ج د ایسی چوکور ہے۔ جو ایک

(۳) (۲) (۱)

ہی قاعدے پر دو آئیسوسیلس تکونوں کے ضلعوں سے بنی ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور یہ ک اش ۵ و ۹ کی فگر میں آئی ہے۔ اور اس کی خاصیتیں مفصلۂ ذیل ہیں +

(۱) اس کا ایک وتر دوسرے وتر کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے +

(۲) اس کا محور اج زاویوں ا و ج کی تنصیف کرتا ہے +

(۳) باقی زاوئے ب اور د برابر ہیں +

(۴) محور اج اس فگر کو دو کانگروئنٹ تکونوں میں تقسیم کرتا ہے۔ جن کے متصلہ ضلعے برابر ہوتے ہیں +

(۵) اس کے مقابل کے ضلعوں کے نقاط تنصیف کے جوڑ محور کے ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں۔ اور محور کے ساتھ اُن کا میلان برابر ہوتا ہے +

چونکہ یہ فگر اپنی شکل میں پتنگ سے ملتی ہے۔ اسلئے اسے کائٹ کہتے ہیں +

دوم۔ نمبر ۳ میں چوکور ا ب ج د ایسی ہے۔ کہ آئیسوسیلس تکون کے ایک ضلع کے کسی نقطے سے اس کے قاعدے کے متوازی خط کھینچنے سے بنی ہے۔ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے۔ کہ یہ فگر اُس خط کے گرد سمیٹریکل ہے۔ جو اس تکون کے زاویۂ راس کی تنصیف کرتا ہے +

اس فگر کی بڑی بڑی مفصلۂ ذیل خاصیتیں غور کرنے سے معلوم ہو جائینگی +

(۱) دو مقابل کے ضلعوں اد ب ج کی تنصیف ایک ہی خط جو ب ج پر عمود ہے۔ کرتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۲) باقی دونو مقابل کے ضلعے آپس میں برابر ہیں - اور باقی دونو ضلعوں میں سے ہر ایک کے ساتھ برابر زاوئے بناتے ہیں +

(۳) ہر ایک زاویہ اپنے دونو متصلہ زاویوں میں سے ایک کے برابر ہے - اور دوسرے کا سپلیمنٹری ہے +

(۴) اس کے دونو وتر برابر ہیں - اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں +

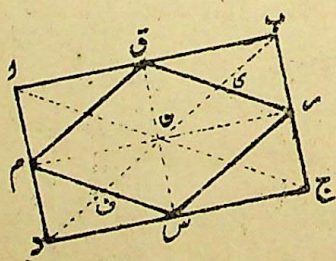
(۵) اگر مقابل کے ضلعوں کے نقاط تنصیف کو ملا دیں - تو ان جوڑوں میں سے ایک وتروں کے درمیانی زاوئے کی تنصیف کرتا ہے - اور دوسرا وتروں کی تنصیف کرتا ہے - اور یہ دونو جوڑ ایک دوسرے کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتے ہیں +

ایسی چوکور کا نام ٹریپیزائڈ رکھا گیا ہے +

نتیجہ - کسی چوکور کے مقابل کے کوئی سے دو ضلعوں کے نقاط تنصیف کے جوڑ کو چوکور کا میڈین کہتے ہیں +

چنانچہ ہر چوکور کے دو میڈین ہوتے ہیں +

مثالیں

۱ - اب ج د ایک چوکور ہے - جس کے میڈین م ر ق س نقطہ ن پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں -

تو ثابت کرو - کہ فگر م ق ر س متوازی الاضلاع ہے +

۲ - اگر اس چوکور کے دونو وتر اج ب د نقطہ ن پر سے گزریں تو ثابت کرو - کہ

(۱) چوکور اب ج د متوازی الاضلاع ہے -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۲) اگر شکل م ق ر س رامبس ہو۔ تو چوکور اب ج د قائم الزوایا ہوگی +

(۳) اگر م ق ر س قائم الزوایا ہو۔ تو اب ج د رامبس ہوگی +

(۴) ثابت کرو۔ کہ (۱) (۲) (۳) کے عکس بھی صحیح ہیں +

(۱) کا مختصر ثبوت

ی ن = ن ف

اور م ف اور ق ی اج کے متوازی ہیں۔

∴ ب ی = ی ن

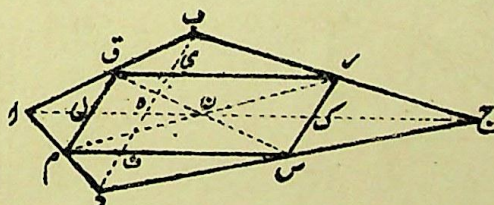
اور ن ف = ف د

∴ ب ن = ن د

اسی طرح ا ن = ن ج

∴ اب ج د ▱ ہے۔

باقیوں کے ثبوت طالب علم کو خود سوچنے چاہئیں +

۳۔ اوپر ہی کی شکل میں اگر ایک وتر اج نقطہ ن پر سے گزرے اور دوسرا وتر ب د اس وتر کو کسی اور نقطہ ہ پر کاٹے۔ تو ثابت کرو۔ کہ

(۱) چوکور اب ج د متوازی الاضلاع نہیں ہے۔

(۲) وتر اج وتر ب د کی تنصیف کرتا ہے۔

(۳) اگر اس حالت میں چوکور م ق ر س قائم الزوایا ہو۔ تو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چوکور اب ج د کائٹ ہوگی۔

(۴) ثابت کرو۔ کہ (۱)، (۲)، (۳) کے عکس بھی صحیح ہیں۔

(۱) کا مختصر ثبوت

ب ہ = دوچند ی ہ

= دوچند ق ل

ہ د = دوچند ہ ف

= دوچند م ل

∴ اج ب د کی تنصیف کرتا ہے۔

اور ∴ تمام خطوط مستقیم کی تنصیف کرتا ہے۔ جو اس شکل کے بیچ سے ب د کے متوازی کھینچے جائیں۔

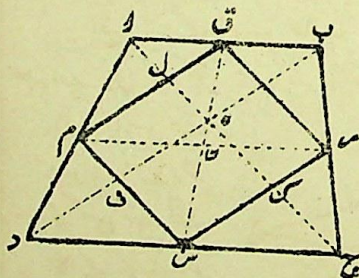
باقیوں کے ثبوت طالب علم کو خود نکالنے چاہئیں۔

۴۔ اگر چوکور اب ج د کے دونو وتر نقطہ ن پر سے تو نہ گزریں۔ مگر اُن کا نقطۂ تقاطع ہ چوکور کے ایک میڈین پر واقع ہو۔ تو ثابت کرو۔ کہ

(۱) میڈین ق س اُن خطوط کی تنصیف کریگا۔ جو چوکور کے بیچ سے م ر کے متوازی کھینچے جائیں۔

(۲) اگر م ق ر س رامبس ہو۔ تو چوکور اب ج د ٹریپیزائڈ ہوگی۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۳) ثابت کرو - کہ (۱) (۲) کے عکس بھی صحیح ہیں -

(۱) کا مختصر ثبوت

ی ل || اب

اسی طرح ف ک || ج د

لیکن ی ہ م ق س س کے وتر ق س پر ہے -

ی ل || ف ک

∴ اب || ج د

∴ ق س تمام خطوں کی جو اس نگر کے بیچ سے م س کے متوازی کھینچے جائیں - تنصیف کریگا -

باقی مثالیں طالب علم کو خود حل کرنی چاہئیں ٭

۵ - اگر چوکور اب ج د کے وتر اج ب د میں سے کوئی بھی نقطہ ن پر سے نہ گزرے - اور نقطہ ہ جہاں کہ دونو وتر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں - چوکور کے کسی میڈین پر نہ ہو - تو ثابت کرو - کہ چوکور اب ج د نہ تو متوازی الاضلاع ہے - نہ کائٹ اور نہ ٹریپیزائڈ ٭

تع - جس چوکھد کے مقابل کے دو ضلعے متوازی ہوتے ہیں - اور باقی دو ضلعے برابر ہوتے ہیں - اسے آیکس ہیڈ (Axe-head) یعنی تیشہ نما کہتے ہیں ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

لوکس

اگر کسی ایک خط یا کئی خطوں پر یا کسی ایک حصّۂ خط پر (خواہ وہ خط مستقیم ہو یا منحنی) ہر ایک نقطہ کوئی خاص شرط پوری کرے۔ اور اس خط کے باہر اور کوئی نقطہ یہ شرط پوری نہ کرے۔ تو یہ خط یا خطوط یا حصّۂ خط شرط مذکورہ پورا کرنے والے نقطے کا لوکس کہلاتا ہے۔ یعنی لوکس ایک نقطے کا گزرگاہ ہوتا ہے۔ جو کسی خاص شرط کے موافق چلتا ہے ٭

کسی خط یا خطوط کو کسی نقطے کی دی ہوئی شرط پورا کرنے والا لوکس ثبوت کرنے کے لیئے چاہیئے۔ کہ ثابت کریں ٭

(۱) اگر وہ نقطہ شرط مذکور کو پورا کرے۔ تو وہ خط مذکور پر واقع ہوگا۔ یعنی اگر خط پر واقع نہ ہو۔ تو شرط مذکور کو پورا نہ کریگا ٭

(۲) اگر نقطہ خط مذکور پر واقع ہو۔ تو شرط مذکور کو پورا کرتا ہے۔ یعنی اگر شرط مذکور کو پورا نہ کرے۔ تو خط مذکور پر واقع نہ ہوگا ٭

لوکسوں کی چند بدیہی مثالیں نیچے لکھی جاتی ہیں۔

۱۔ اگر کوئی نقطہ کسی دیئے ہوئے نقطے سے ہمیشہ برابر فاصلے پر چلتا رہے۔ تو اُس کا لوکس اُس دائرے کا محیط ہے۔ جس کا مرکز دیا ہوا نقطہ اور نصف قطر دیا ہوا فاصلہ ہے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲- اگر کوئی نقطہ کسی دئے ہوئے خط سے ہمیشہ ایک دئے ہوئے فاصلے پر رہے۔ تو اُس کا لوکس دو متوازی خط ہونگے۔ جو دئے ہوئے خط کے متوازی ہیں۔ اور اُس کی مخالف سمتوں میں دئے ہوئے فاصلے پر واقع ہیں ؞

۳- اگر کوئی نقطہ ہمیشہ دو دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو۔ تو اُس کا لوکس وہ خط ہوگا۔ جو دئے ہوئے نقطوں کے جوڑ کو قائمہ زاویوں پر تنصیف کرتا ہے ؞

۴- اگر کوئی نقطہ دو باہم کاٹنے والے خطوط سے ہمیشہ برابر فاصلے پر واقع ہو۔ تو اُس کا لوکس ایسے دو خط ہونگے۔ جو ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اور دئے ہوئے خطوط کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ؞

لوکسوں کا تقاطع

اگر کسی نقطے کا ا شرط پورا کرنے والا لوکس ل ہو۔ اور کسی اور نقطے کا ب شرط پورا کرنے والا لوکس ی ہو۔ تو صرف وہی نقطے جہاں ل اور ی باہم کاٹتے ہیں۔ شرائط ا اور ب پورا کرینگے۔ مثلاً

(۱) اگر تین ایسے نقطے دئے ہوئے ہوں۔ جو ایک ہی خط میں نہ ہوں۔ تو اُن نقطوں کی سطح میں صرف ایک ہی ایسا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نقطہ ہو سکتا ہے - جس کا فاصلہ دئے ہوئے نقطوں سے برابر ہو ٭

(اوپر کی مثال ۲ سے معلوم ہے - کہ جو نقطے پہلے دو دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر ہیں - ایک ہی خط پر واقع ہیں - اور اسی طرح جو نقطے دوسرے اور تیسرے نقطوں سے برابر فاصلے پر ہیں - ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں - پس ان دونو خطوں کا مقام تقاطع نقطۂ مطلوبہ ہوگا - اور چونکہ دو خطوں کا تقاطع صرف ایک ہی نقطے پر ہوتا ہے - اس لئے اس نقطے کے سوا اور کوئی نقطہ شرط مذکورہ کو پورا نہیں کریگا) ٭

(۲) اگر تین خط ایسے دئے ہوئے ہوں - کہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہوں - مگر ایک ہی نقطے پر سے نہ گزرتے ہوں (یعنی نہ متوازی ہوں - اور نہ کانکرنٹ) - تو اُن کی سطح میں صرف چار ہی نقطے ہو سکتے ہیں - جن کا فاصلہ اُن خطوں سے برابر ہو ٭

(اس کا ثبوت اوپر کی مثال ۴ سے بآسانی معلوم ہو جائیگا) ٭

پس بیان مذکورۂ بالا سے معلوم ہؤا - کہ جب کوئی ایسا نقطہ دریافت کرنا ہو - جو دو علیحدہ علیحدہ شرط پوری کرے - تو ضرور ہے - کہ ایک ایک شرط کو پورا کرنے والا لوکس الگ الگ دریافت کیا جائے - اور ان دونو لوکسوں کا مقام تقاطع نقطۂ مطلوبہ ہوگا -

ایسے سوال میں تین صورتیں ہو سکتی ہیں ٭

(۱) لوکسوں کا تقاطع ناممکن ہو - تو سوال ہی ناممکن ہے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

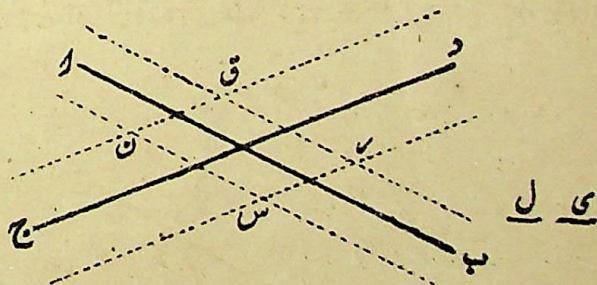
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۲) اگر دونو لوکس ایک سے زیادہ نقطوں پر تقاطع کریں - تو سوال کے حل بھی ایک سے زیادہ ہونگے +

(۳) اگر پہلا لوکس یا اس کا کوئی جُز دوسرے لوکس یا اُس کے کسی جُز پر منطبق ہو - تو چونکہ جُز منطبقہ کا ہر ایک نقطہ دونو شرائط کو پورا کرتا ہے - اس لئے یہ سوال قابل حل نہیں ہے +

ذیل میں اس کی چند مثالیں دی جاتی ہیں ٭

مثالیں

۱- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو - کہ دو دیئے ہوئے خطوں (اب ج د) سے دو دیئے ہوئے فاصلوں (ل اور ی) پر واقع ہو +

حل

پہلے صرف اسی شرط کا خیال کرو - کہ اب سے نقطۂ مطلوبہ کا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فاصلہ ل ہونا چاہیئے۔ بدیہی لوکس کی مثال ۲ کی رُو سے یہ نقطہ اب کے متوازی دو خطوں میں سے کسی پر واقع ہونا چاہیئے۔ اور اسی طرح اب اگر دوسری شرط کا خیال کریں۔ کہ یہ نقطہ ج د سے ی فاصلے پر واقع ہونا چاہیئے۔ تو نقطۂ مطلوبہ ج د کے متوازی دو خطوں میں سے کسی پر واقع ہونا چاہیئے۔ پس جہاں یہ چاروں خط باہم کاٹینگے۔ وہ چاروں نقطے دونو شرطیں پوری کرتے ہیں۔

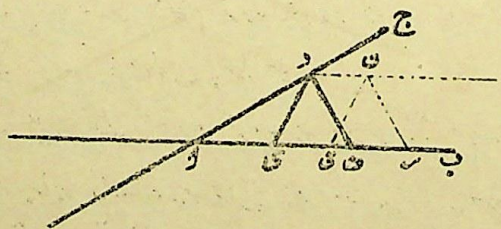
اگر اب اور ج د متوازی ہوں۔ تو ظاہر ہے۔ کہ یہ چاروں خط آپس میں متوازی ہیں۔ اور کہیں ایک دوسرے کو نہیں کاٹتے۔ اس لیئے اس صورت میں سوال کا حل ناممکن ہے *

۴۔ اب اور اج دو خط ہیں۔ چاہتے ہیں۔ کہ ایک ایسی اکوی لیٹرل △ دی ف بنائیں۔ کہ جس کا ایک راس د اج پر ہو۔ اور قاعدہ ی ف (جس کا طول دیا ہوا ہے) اب پر ہو۔

حل

صرف اسی شرط کا خیال کرو۔ کہ مثلث کے قاعدے کا دیا ہوا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

طول اب پر ہے۔
تو چونکہ یہاں تکون کا ارتفاع بھی معلوم مقدار کا ہے۔ اس لئے بدیہی توکس مثال ۲ کی رُو سے اس کا راس اب کے متوازی دو خطوں میں کسی پر واقع ہوگا۔
اب دوسری شرط کی رُو سے راس اج پر واقع ہونا چاہیئے۔ اس واسطے راس مذکور اُس نقطے پر ہوگا۔ جہاں خطوط متوازی اج کو کاٹتے ہیں۔
پس سوال کا عمل ہو گیا۔
واضح ہو۔ کہ تکون دی ف کا مقام خطوط اب اور اج کے اعتبار سے تکون کے ارتفاع پر منحصر ہے۔ یعنی ی ف کا کوئی حصہ ب ا کے ا کی طرف بڑھے ہوئے حصے پر بھی ہو سکتا ہے +
ذیل کی مثالوں کو اوپر کے قاعدے سے حل کرو۔
۱۔ایک دائرہ کھینچو (جس کا نصف قطر دیا ہُوا ہے) جو دو دیئے ہوئے نقطوں پر سے گزرے +
۲۔ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جو دو دیئے ہوئے نقطوں سے دیئے ہوئے فاصلوں پر ہو +
۳ ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جو دو دیئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو۔اور ایک تیسرے نقطے سے دیئے ہوئے فاصلے پر ہو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۴- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو- جو دو دئے ہوئے خطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو- اور ایک تیسرے خط سے دئے ہوئے فاصلے پر ہو ٭

۵- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو- جو دو دئے ہوئے نقطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو- اور ایک دئے ہوئے خط سے دئے ہوئے فاصلے پر ہو ٭

۶- ایک ایسا نقطہ معلوم کرو- جو دو دئے ہوئے خطوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو- اور ایک دئے ہوئے نقطے سے دئے ہوئے فاصلے پر ہو ٭

۷- تکون ا ب ج کا عمود ا د جو ا سے ب ج پر ڈالا گیا ہے دیا ہؤا ہے- اور دو ضلعوں ا ب ا ج کا طول دیا ہؤا ہے تکون ا ب ج بناؤ ٭
اس سوال میں دئے ہوئے عمود کا طول کسی حد کے اندر ہونا چاہئے-
دی ہوئی شرطوں کے موافق عموماً کتنی تکونیں بن سکتی ہیں؟

۸- کسی اکوی لیٹرل تکون کا ایک راس قائم ہے- اور دوسرا راس ایک دئے ہوئے خط پر کسی جگہ لیا گیا ہے- ثابت کرو- کہ تیسرے راس کا لوکس دو خط مستقیم ہیں-
اوپر کی مثال سے ایک ایسا اکوی لیٹرل تکون بناؤ- جس کا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ایک راس دئے ہوئے نقطے پر ہو - اور باقی دونو میں سے ایک ایک ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر ہو -

اس سے یہ بھی ثابت کرو - کہ انسے بہت سے اکوی لیٹرل △ بن سکتے ہیں - جن کا ایک ایک راس تین دئے ہوئے خطوں میں سے ایک ایک پر واقع ہو +

۹ - م ایک قائم نقطہ ہے - اور ن کوئی نقطہ ایک دئے ہوئے خط پر ہے - ن م کو ق تک بڑھاؤ - کہ م ق = م ن ثابت کرو - کہ ق کا لوکس ایک خط مستقیم ہے - جو دئے ہوئے خط کے متوازی ہے -

اس کی مدد سے دو باہم کاٹنے والے خطوں میں سے ہر ایک پر ایسا ایک ایک نقطہ معلوم کرو - کہ ان کے جوڑ کی ایک دئے ہوئے نقطے پر تنصیف ہو +

۱۰ دو دئے ہوئے دائروں میں سے ہر ایک پر ایسا ایک ایک نقطہ معلوم کرو - کہ ان کا جوڑ ایک دئے ہوئے نقطے پر سے گزرے - اور وہاں ہی اُس کی تنصیف ہو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

خطوط کے سٹوں کا تقاطع

بعض دفعہ سوال کے حل کرنے میں صریحاً یا ضمناً ایک ایسا خط معلوم کرنا پڑتا ہے - جو دو شرطوں کو پورا کرے - اس حالت میں بھی اوپر کی طرح ایک ایک شرط کو علیحدہ علیحدہ خیال کرکے اُس کے پورا کرنے والا خطوط کا ایک ایک سٹ الگ الگ معلوم کرنا چاہیئے - پس ظاہر ہے - جو خط اُن دونو سٹوں میں مشترک ہے - وہی خط مطلوب ہوگا - اور اگر ایسا کوئی خط مشترک نہ ہو - تو حل ناممکن ہے ؀

اور اگر ایک سے زیادہ خط دونو سٹوں میں مشترک ہوں - تو سوال کا حل بھی ایک سے زیادہ طرح پر ہوگا ؀

مثال

ایک ایسا خط کھینچو - جو دو دئے ہوئے باہم کاٹنے والے خطوط ا م ب ج م د کے ساتھ برابر زاوئے بنائے - اور دو دئے ہوئے نقطوں ل ی سے برابر فاصلے پر ہو ؀

حل

پہلے اوّل شرط کا خیال کرو - کہ خط مطلوب خطوط ا م ب ج م د کے ساتھ برابر زاوئے بنائے - تو معلوم ہوگا - کہ اس شرط کے پورا کرنے والے متوازی خطوط کے دو سٹ کھینچے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

جا سکتے ہیں۔ جو ا م ب ج م د خطوط کے درمیانی زاویوں کی
تنصیف کرنے والے خطوں کے بھی متوازی ہیں۔
پھر اگر دوسری شرط کا خیال کروگے۔ کہ خط مطلوب ل ی
سے برابر فاصلے پر ہو۔ تو معلوم ہوگا۔ کہ اس شرط کو پورا
کرنے والے خطوط کے دو سٹ ہیں۔ ایک تو خط ل ی کے
متوازی اور دوسرا اس کے نقطۂ تنصیف پر سے گزرنے والا۔
اب ظاہر ہے۔ کہ ان پچھلے خطوں میں دو خط جو زاویہ
ا م د اور ا م ج کی تنصیف کرنے والے خط کے متوازی ہیں۔
دونو شرائط کو پورا کرتے ہیں۔ اس لئے وہی خطوط مطلوب ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

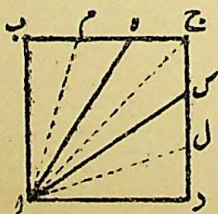
قاعدۂ تحلیلی و ترکیبی

جب کوئی مسئلہ حل کرنے کے لئے دیا جائے۔ تو طالب علم کو چاہیئے۔ کہ مسئلۂ مذکور میں جو ثبوت کرایا ہے۔ اسے ثابت مان کر فگر بنالئے۔ اور اُس فگر کے کچھ خواص معلوم کرے۔ اس سے پتہ لگ جائیگا۔ کہ کن خواص پر اس مسئلے کا حل منحصر ہے +

اسی طرح جب کوئی سوال حل کرنا ہو۔ تو اسے پہلے ہی سے حل مان کر عمل کرے۔ اور فگر کو امتحان کرکے اس کے خواص دریافت کرے۔ اس طرح اس کے بعض خواص ایسے مل جائینگے۔ جن پر سوال کا عمل موقوف ہے +

اس قسم کے عمل کو قاعدۂ تحلیلی و ترکیبی کہتے ہیں۔ یعنی جب ہم فگر کے خواص معلوم کرتے ہیں۔ تو ہم تحلیلی عمل کرتے ہیں۔ اور جب اپنی تحقیقات کے نتائج کو فگر کے بنانے میں کام میں لاتے ہیں۔ تو ترکیبی عمل کرتے ہیں +

چونکہ اس عمل میں مہارت مشق سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لئے اس کے بارے میں اور ہدایات دینی فضول معلوم ہوتی ہیں +

مثال کے طور پر نیچے ایک سوال اس قاعدے سے حل کیا جاتا ہے۔

ایک مربّع اب ج د کو اس کے ا کونے سے دو خطوط اہ اور اک کھینچکر تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرو۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

عمل تحلیلی

چونکہ ہر ایک حصہ مربع کی تہائی ہے۔اس لئے ظاہر ہے۔کہ خطوط اہ اک جب کھینچے جائینگے۔تو وتر اج کے ادھر ادھر جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔واقع ہونگے۔

اب چونکہ △ اب ہ = $\frac{1}{3}$ اب ج د

= $\frac{2}{3}$ △ اب ج

∴ ب ہ = $\frac{2}{3}$ ب ج

اسی طرح دک = $\frac{2}{3}$ ج د

پس پتہ لگ گیا۔کہ خطوط اہ اور اک کس طرح کھینچے ہیں۔
اب عمل ترکیبی پر چلنے سے مطلوبہ شکل بن جائیگی۔
چند مثالیں مشق کے لئے دی جاتی ہیں۔

۱-ایک مربع کے مساوی قائم الزوایا کا ایک ضلع دیا ہوا ہے۔اس کا دوسرا ضلع معلوم کرو۔

۲-ایک تکون کو اس کے ضلع پر کے کسی نقطے سے خطوط کھینچکر تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔

۳- △ اب ج کے قاعدے ب ج کے متوازی خط دی کھینچو۔کہ اب کو د پر اور اج کو ی پر اس طرح کاٹے۔کہ دی ب د اور ج ی کے مجموعے کے برابر ہو۔

۴-ایک دئے ہوئے خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو۔کہ ایک حصے پر کا مربع دوسرے حصے پر کے مربع

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سے دو چند ہو۔
ک اش ۴۷ کی رُو سے اس سوال پر بقاعدۂ تحلیلی غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا۔ کہ اس کا حل ذیل کے سوال کے حل پر موقوف ہے *
"ایک تکون کا قاعدہ اور اُس کے متصلہ زاوئے دئے ہوئے ہیں۔ تکون مذکور بناؤ *
۵۔ ایک دئے ہوئے خط کو اتنا بڑھاؤ۔ کہ کُل بڑھائے ہوئے خط پر کا مربّع صرف بڑھے ہوئے حصّے کے مربّع سے دو چند ہو *
(اس کا عمل اوپر کے سوال کی مانند ہے) *
۶۔ ایک خط کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو۔ کہ ایک حصّے پر کا مربّع دوسرے حصّے پر کے مربّع سے سہ چند ہو۔
اس سوال کے حل کے لئے یاد رہے۔ کہ کسی اکوی لیٹرل تکون کے ارتفاع پر کا مربّع اُس کے نصف قاعدے پر کے مربّع سے سہ چند ہوتا ہے *

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

متفرّق مثالیں

مسئلے

۱ نقطہ ن سے △ اب ج کے ضلعوں ب ج ج ا اب پر عمود ن د ن ی ن ف ڈالے گئے ہیں - ثابت کرو - کہ اف ب د اور ج ی پر کے مربعے ملکر ای ج د اور ب ف پر کے مربعوں کے مساوی ہیں ٭

اس کا مفصلۂ ذیل عکس بھی ثابت کرو -

اگر △ اب ج کے ضلعوں ب ج ج ا اب پر د ی ف ایسے نقطے لئے جائیں - کہ اف ب د اور ج ی پر کے مربعے ملکر ای ج د ب ف پر کے مربعوں کے مساوی ہوں - تو ان ضلعوں پر نقاط د ی ف سے جو عمود کھینچے جائینگے - وہ ایک ہی نقطے پر سے گزرینگے ٭

۲ تمام مساوی △ میں سے جو ایک ہی قاعدے پر واقع ہوں - آئیسوسیلس △ کا پیرمیٹر سب سے کم ہوگا ٭

۳ اگر دو تکونوں میں ایک تکون کے دو ضلعے دوسری تکون کے دو ضلعوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوں - اور دو برابر ضلعوں کے مقابل کے زاویے برابر ہوں - تو باقی دو برابر ضلعوں کے مقابل کے زاویے یا تو برابر ہونگے -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

یا سپلیمنٹری ہونگے - اور جس حالت میں برابر ہونگے - تکون کانگروئنٹ ہونگے ٭

حاصل

اس سے ثابت کرو - کہ دونو تکون مفصلۂ ذیل حالتوں میں کانگروئنٹ ہونگے -

(۱) جبکہ دونو زاوئے جو برابر دئے گئے ہیں - قائمے یا آبٹیوس ہوں ٭

(۲) جبکہ باقی دو برابر ضلعوں کے مقابل کے دونو زاوئے اکیوٹ یا دونو آبٹوس ہوں ٭

(۳) جبکہ ہر ایک تکون میں دئے ہوئے زاوئے کے مقابل کا ضلع دوسرے دئے ہوئے ضلع سے چھوٹا نہ ہو ٭

۴ اب ج د ایک ▭ ہے - ج د پر ایک اور ▭ ج د ی ف بنائی گئی ہے - اور ی ف پر ایک اور ▭ ی ف غ ہ بنائی گئی ہے - ثابت کرو - کہ ہر ایک ▭ جو قاعدہ اب پر اور متوازی خطوط اب اور ہ غ کے درمیان ہوگی - شکل اب ج ف غ ہ ی د کے مساوی ہوگی ٭

اس سے ک ا ش ۴۵ کا اور حل نکالو ٭

۵ آئیسوسیلس △ اب ج کے قاعدے ب ج کے کسی نقطہ د سے ضلعوں کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں - جو ضلعوں سے نقاط ی اور ف پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ خواہ د قاعدہ ب ج میں کسی جگہ ہو - ان دونو خطوں کا مجموعہ ہر حالت میں ایک ہی ہوگا ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۶ ایک اکوی لیٹرل △ اب ج کے کسی اندرونی نقطہ ن پر سے ایک خط ن ق ب ج کے || کھینچا گیا ہے - جو اب اج سے نقاط ن اور ق پر ملتا ہے - اسی طرح ر س ط ل || اج ا اب کے کھینچے گئے ہیں - ثابت کرو - کہ ن ق ر س ط ل ملکر △ اب ج کے دو ضلعوں کے برابر ہیں - اور یہ بھی ثابت کرو - کہ اگر ن سے ن د ن ی ن ف △ اب ج کے ضلعوں تک کھینچے جائیں - اور ان میں سے ہر ایک اُن ضلعوں کے ساتھ دیئے ہوئے برابر زاویئے بنائے - تو ن کی جگہ بدلنے سے ان تینوں خطوں کے مجموعے پر کچھ اثر نہ ہوگا +

۷ م ص م ی دو دیئے ہوئے خط ہیں - اُن پر نقطے ا اور ب بترتیب ایسے لئے گئے ہیں - کہ م ا اور م ب کا مجموعہ ہمیشہ ایک ہی رہتا ہے - اور ا اور ب پر سے جو خطوط م ی م ص کے متوازی کھینچے جاتے ہیں - وہ نقطہ ن پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ ن ایسے خط پر واقع ہے - جو م ص اور م ی کے ساتھ برابر زاویئے بناتا ہے +

۸ اب ج د ایک چوکھد ہے - جس کے ضلعے اب اور د ج آپس میں || ہیں - اور دونو ملکر ب ج کے برابر ہیں - ثابت کرو - کہ ب^ اور ج^ کی تنصیف کرنے والے خط ایک دوسرے کو اد پر کاٹینگے +

۹ اگر کسی مثلث کے اندر ایسا نقطہ لیا جائے - جو اس کے ضلعوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو - تو اُس نقطے پر ضلعوں کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مقابل زاویئے آپس میں برابر ہونگے ÷

۱۰ دو ▱ کا ایک وتر مشترک ہے - ثابت کرو - کہ باقی دو وتروں کے سرے ایک ▱ کے راس ہیں ÷

۱۱ کئی قائم الزاویہ △ کا ⋀ قائمہ مشترک ہے - اور اُن کے وتر برابر ہیں - ثابت کرو - کہ کل وتروں کے نقاط تنصیف ایک ہی دائرے پر واقع ہونگے ÷

۱۲ اگر دو منتظم شکلیں ایسی ہوں - کہ ایک کا کوئی بیرونی زاویہ دوسری کے کسی اندرونی زاوئے کے برابر ہو - تو یا تو وہ دونو مربع ہونگی - یا ایک مثلث اور ایک مسدس ÷

۱۳ مثلث ا ب ج کے ضلعے ا ب ا ج بڑھائے گئے ہیں - اور دونو بیرونی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے - تو ثابت کرو - کہ جو خط زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں - اُن کے درمیان کا ایک زاویہ ⌃ا ب ج اور ⌃ب ج ا کے مجموعے کے نصف کے برابر ہے ÷

۱۴ ک ا ش ب ہ کی شکل میں فرض کرو - کہ نقطہ م سے نشان ل ب ج کو کاٹتا ہے - ا ب ا ج پر عمود م ن م ک کھینچے گئے ہیں - اور بڑھانے پر ن ک د ق سے س اور س پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ قائم الزوایا ا س ا س کے مساوی ہے -

اس کی مدد سے یہ بھی ثابت کرو - کہ اگر ن غ م ا ق کو بڑھایا جائے - تو وہ ایک ہی نقطے پر سے گزرینگے - (اسے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اوپر کی شکل کی مدد کے بغیر بھی ثابت کرو) +

۱۵ △ ا ب ج کے ضلعوں ا ب اور ب ج پر کوئی ▱ ا ب ض ی ب ج د ل بنائی گئی ہیں - اور ی ض د ل بڑھانے سے ن پر ملتے ہیں - اج پر اج ہ غ ایسی ▱ بنائی گئی ہے - جس کے ضلعے اغ ج ہ || ہیں ن ب کے - ثابت کرو - کہ یہ ▱ دوسری دونو ▱ کے مساوی ہے +

۱۶ کسی اکوی لیٹرل △ کا ایک راس ایک دئے ہوئے نقطے پر ہے - اور دوسرا راس ایک دئے ہوئے دائرے پر ہے - ثابت کرو - کہ اس کے تیسرے راس کا لوکس دو دائرے ہونگے - اس سے ثابت کرو - کہ ایسی اکوی لیٹرل △ جتنی چاہیں - بنا سکتے ہیں - جن کا ایک ایک راس تین دائروں میں سے ہر ایک پر واقع ہو +

۱۷ ن ایک دیا ہوا نقطہ ہے - اور م ایک دئے ہوئے دائرے پر ایک نقطہ ہے - ن م کو ق تک بڑھاؤ - کہ ن ق = ن م ثابت کرو - کہ ق کا لوکس ایک دائرہ ہے -

اس کی مدد سے ایک دئے ہوئے نقطہ ن پر سے م ق ایک ایسا خط کھینچو - جس کی ن پر تنصیف ہو - اور جس کے دونو سرے دو دئے ہوئے دائروں پر واقع ہوں +

۱۸ اگر دو چکوروں کے وتر برابر ہوں - اور ایک دوسرے کو ایک ہی زاوئے پر کاٹیں - تو یہ چکور مساوی ہونگے +

۱۹ ایک ▱ کے وتروں پر ایسے قائم الزاوئے بنائے گئے ہیں - جن کے وہ ضلعے جو وتروں کے مقابل ہیں ▱ کے اندر کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ایک ضلع پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں - ثابت کرو - کہ یہ دونو قائم الزوایۂ فگر کے مساوی ہیں +

۲۰ ایک اکوی لیٹرل ہکسیگن کے تمام ضلعے ایک دئے ہوئے نقطے سے برابر فاصلے پر ہیں - ثابت کرو - کہ اُس کے متبادلہ زاویئے برابر ہیں - اور اس کے تینوں قطر باہم برابر ہیں - جن میں سے ہر ایک کے لحاظ سے یہ فگر سیمیٹریکل ہے - بتاؤ - ایسی فگر کس طرح بنائیں - اور یہ بھی ثابت کرو - کہ اس فگر کا مساوی الزوایا ہونا ضروری نہیں ہے +

۲۱ ایک مساوی الزوایا ہکسیگن کے تمام راس ایک دئے ہوئے نقطے سے برابر فاصلے پر ہیں - ثابت کرو - کہ اس کے متبادلہ ضلعے برابر ہیں - یہ بھی ثابت کرو - کہ اس کے تینوں میڈین جو محور سیمیٹری ہیں - برابر ہیں - بتاؤ - ایسی فگر کس طرح بنائی جائے - اور یہ بھی ثابت کرو - کہ اس کا اکوی لیٹرل ہونا ضروری نہیں ہے +

۲۲ قائم الزاویہ تکون کے وتر کا نقطۂ تنصیف تکون کے تینوں کونوں سے برابر فاصلے پر ہوتا ہے +

۲۳ اگر کسی تکون کے دو ضلعے دئے ہوئے ہوں - تو اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا - جبکہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوگا +

سوال

۱ ایک تکون کے دو ضلعے اور ان دونو ضلعوں میں سے ایک

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کے مقابل کا ^ دیا ہوا ہے۔ تکون مذکور بناؤ۔
بناؤ۔ کس حالت میں اس کے دو حل ہو سکتے ہیں۔ اور
کس حالت میں حل ناممکن ہے *

۲ ایک تکون کا قاعدہ اور قاعدے پر کا ایک زاویہ اور دو ضلعوں کا مجموعہ دیا ہوا ہے۔ تکون بناؤ *

۳ ایک تکون کا قاعدہ۔ اور قاعدے پر کا ایک زاویہ اور دو ضلعوں کا فرق دیا ہوا ہے۔ تکون بناؤ *

۴ ایک تکون کا قاعدہ۔ زاویۂ راس اور باقی دونو ضلعوں کا مجموعہ یا فرق دیا ہوا ہے۔ تکون مذکور بناؤ *

۵ ایک تکون کا پیرامیٹر اور دو زاویے دیئے ہوئے ہیں۔ تکون بناؤ *

۶ ایک تکون کے تینوں میڈین دیئے ہوئے ہیں۔ تکون بناؤ *

۷ اب ایک خط ہے۔ اور م اور ن دو نقطے ہیں اب پر کوئی ایسا نقطہ د معلوم کرو۔ کہ خطوط م د ن د خط اب کے ساتھ برابر زاویے بنائیں۔
اور اس صورت میں ثابت کرو۔ کہ اگر م اور ن اب کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ تو م د اور ن د کا مجموعہ کم سے کم ہوگا۔ اور اگر م د اور ن د خط اب کی مخالف سمتوں میں واقع ہوں۔ تو ان کا فرق زیادہ سے زیادہ ہوگا *

۸ اگر کسی چوکور کے مقابل کے زاویے سپلیمنٹری ہوں۔ تو ایک ایسا نقطہ دریافت ہو سکتا ہے۔ جو چاروں راسوں سے برابر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فاصلے پر واقع ہو۔

پس ایسی چوکور کے گرد دائرہ بنایا جا سکتا ہے +

۹ اگر کسی کانویکس چوکور کے کوئی سے دو مقابل کے ضلعوں کا مجموعہ دو مقابل کے ضلعوں کے مجموعے کے برابر ہو۔تو ایسا نقطہ معلوم ہو سکتا ہے۔جو اس کے چاروں ضلعوں سے برابر فاصلے پر ہو۔

نوٹ۔جب کسی فگر کے دو ضلعوں پر کے دو نقطوں کا جوڑ فگر سے باہر نہ واقع ہو۔تو ایسی فگر کو کانویکس (Convex) کہتے ہیں +

۱۰ ہر ایک △ دو آئیسوسیلس △ اور ایک کائٹ میں تقسیم ہو سکتی ہے +

۱۱ △ اب ج کا ضلع اب اج کے برابر ہے۔اور اب پر د اور اج پر ی ایسے نقطے ہیں۔کہ ای = ب د۔تو د ی کے نقطۂ تنصیف کا لوکس معلوم کرو +

۱۲ ایک دئے ہوئے نقطے سے ایک دئے ہوئے خط تک ایک خط کھینچا گیا ہے۔اس خط کے نقطۂ تنصیف کا لوکس معلوم کرو +

۱۳ دو باہم کاٹنے والے خطوں سے برابر فاصلے پر ایک نقطہ واقع ہے۔اس کا لوکس دریافت کرو +

۱۴ دو باہم کاٹنے والے خط دئے ہوئے ہیں۔ایک نقطہ اس طرح چلتا ہے۔کہ ان خطوں سے اُس کے فاصلوں کا مجموعہ ہمیشہ ایک ہی رہتا ہے۔اس نقطے کا لوکس معلوم کرو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۱۵ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار واقع ہیں - ایک خاص طول کی سلاخ ان دونو کے درمیان پھرتی ہے -اس سلاخ کے نقطۂ تنصیف کا لوکس معلوم کرو +

۱۶ ایک ہی قاعدے پر ایک ہی رقبے کی تکونیں بنائی گئی ہیں- تکون کے راس کا لوکس معلوم کرو +

۱۷ ایک ہی قاعدے پر ایک ہی رقبے کی متوازی الاضلاع بنائی گئی ہیں - ان کے وتر کے نقطۂ تنصیف کا لوکس معلوم کرو +

۱۸ ایک ایسا رامبس بناؤ- جس کا ایک زاویہ اور ہر ایک ضلع سے مرکز کا فاصلہ دیا ہوُا ہے +

۱۹ ایک ایسا قائم الزوایا بناؤ- جس کا ایک ضلع اور ہر ایک زاویے سے مرکز کا فاصلہ دیا ہوُا ہے +

۲۰ ایک ایسا مربع بناؤ- جو دئے ہوئے مربع کی تین چوتھائی کے مساوی ہو +

۲۱ دو کانگروئنٹ تکون ایک دوسرے پر لا انتہا طور پر رکھے جا سکتے ہیں - کہ اُن کی مشترکہ فگر سے ایک ایسی ہکسیگن بنے- جس کے مقابل کے ضلعے برابر اور متوازی ہوں -
اس فگر میں اگر ایک △ کا ہر ایک میڈین دوسری △ کے اُس میڈین پر پڑے - جس پر وہ ک اش ہ کی طرح ایک △ دوسری پر رکھنے سے منطبق ہوتا- تو ثابت کرو- کہ اُن سے جو ہکسیگن مذکورہ بالا بنیگی - وہ ان △ میں سے ہر ایک کی دو تہائی کے مساوی ہوگی +

۲۲ کوئی △ ایک کائٹ اور ایک △ میں تین مختلف طرح

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تقسیم ہو سکتی ہے +

۲۳ ایک ایسی ▱ بناؤ - جو دی ہوئی △ کے مساوی ہو - اور جس کا ایک ضلع اور ایک زاویہ △ کے ساتھ مشترک ہو - اس سے ثابت کرو - کہ کوئی دو مساوی تکون جو برابر قاعدوں پر واقع ہوں - کانگروئنٹ حصّوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں +

۲۴ ایک ایسا نقطہ معلوم کرو - جو کائٹ کے چاروں ضلعوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو +

۲۵ ایک ایسا نقطہ معلوم کرو - جو تیشہ نما فگر کے چاروں راسوں سے برابر فاصلے پر واقع ہو +

۲۶ بتاؤ - دئے ہوئے نقطے اور دئے ہوئے خط سے برابر فاصلے پر کئی نقطے کس طرح معلوم کریں +

۲۷ دئے ہوئے ∧ کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو - کہ ایک دوسرے کے ساتویں حصّے کے برابر ہو +

۲۸ ایک ایسی اکوی لیٹرل تکون بناؤ - جس کے ہر ایک راس سے ایک دئے ہوئے نقطے کا فاصلہ دئے ہوئے فاصلوں کے برابر ہو +

۲۹ ایک قائم الزوایا کے کسی ضلع کے نقطۂ تنصیف سے خط کھینچکر قائم الزوایا مذکور کی تثلیث کرو +

۳۰ ایک ▱ کے کسی ضلع کے کسی دئے ہوئے نقطے سے خط کھینچ کر ▱ مذکور کی تثلیث کرو +

۳۱ ل ن ل ن ی دو دئے ہوئے خط ہیں - اور م کوئی نقطہ ل ن ی کے اندر ہے - ایک ایسا خط معلوم کرو - جو م

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پر سے گزرے - اور دئے ہوئے خطوط کے ساتھ کم سے کم رقبے کی △ بنائے +

۳۲ ایک △ ا ب ج کے ضلعوں پر مربّعے ا ب د ی اج غ ف ب ج ہ م بنائے گئے ہیں - اور ی ف غ ہ م د ملائے گئے ہیں - اگر ان تینوں خطوں کا طول دیا ہوا ہو - تو △ ا ب ج بناؤ -

اس سے ثابت کرو - کہ ان خطوں میں سے ہر ایک △ ا ب ج کے میڈین سے دو چند ہے +

۳۳ ایک دی ہوئی چوکور میں ایسا نقطہ معلوم کرو - کہ اگر اس کو چوکور کے کونوں سے ملا دیا جائے - تو چوکور ایسی چار تکونوں میں تقسیم ہو جائے - جن میں سے دو دو آپس میں مساوی ہوں +

(ہر ایک وتر کے نقطۂ تنصیف پر سے دوسرے وتر کے || کھینچو - نقطۂ مطلوبہ ان متوازی خطوں کا مقام تقاطع ہوگا) +

۳۴ △ ا ب ج کے راس ا پر سے ایک خط قاعدے ب ج کے || کھینچا گیا ہے - ب پر سے ایک ایسا خط کھینچو - کہ اج کو ل پر اور مذکورہ بالا || کو ق پر اس طرح کاٹے - کہ ب ل ل ق کا ایک تہائی ہو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

GURUKULA LIBRARY
تعلیم
1.2.08

اصطلاحیں

Acute angle	زاویہ اکیُوٹ (یا حاوہ)
Acute angled triangle	اکیُوٹ زوایا تکون
Altitude	ارتفاع
Axiom	علم متعارفہ
Axis of Symmetry	محور سمیٹری
Book	کتاب
Centre	مرکز
Centroid	سنٹرائڈ
Circle	دائرہ
Circumcentre	سرکم سنٹر
Circumference	محیط
(To) Circumscribe	(کسی فگر کے) گرد بنانا
Complement (of an angle)	کامپلیمنٹ
Complements (of a parallelogram)	مُتمم
Concave	کانکیو
Concurrent	کانکرنٹ
Congruent	کانگروئنٹ
Convex	کنوکس

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Degree	درجہ
Diagonal	وتر
Diameter	قطر
Distance	فاصلہ
Equal	برابر
Equal in every respect	بعینہٖ برابر
Equilateral	اِکوی لیٹرل
Equivalent	مساوی
External Division	بیرونی تقسیم
Extremities of a line	خط کے سرے
Figure	فگر
Gnomon	نومن
Hexagon	ہگسیگن ۔ چھکون
Incentre	اِن سنٹر
(To) Inscribe	(کسی فگر کے) اندر بنانا
Internal Division	اندرونی تقسیم
Intersection of Loci	لوکسوں کا تقاطع
Isosceles	آئیسوسیلس
Kite	کائٹ (یا پتنگ)
Locus	لوکس
Medial Division	میڈیل تقسیم
Median of a triangle	تکون کا میڈین

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Method of Analysis and Synthesis	قاعدہ تحلیلی و ترکیبی
Oblong	قائم الزوایا
Obtuse angled triangle	آبٹیوس زاویہ (یا منفرجہ الزاویہ) تکون
Orthocentre	آرتھو سنٹر
Parallelogram	متوازی الاضلاع
Parallelogram about the diagonal	وتر کے گرد کی متوازی الاضلاع
Parallel Pencil	متوازی پنسل
Parallel straight lines	خطوط مستقیم متوازی
Pencil	پنسل
Pentagon	پنٹیگن یا پچکون
Perimeter	پیری میٹر
Perpendicular	عمود
Plane Rectilinial angle	زاویہ مسطحہ مستقیمۃ الخطین
Plane Rectilinial figure	مسطحہ مستقیمۃ الخطوط
Plane Superficies	ہموار سطح
Point	نقطہ
Polygon	پالیگن یا کثیر الاضلاع
Postulate	اصل موضوعہ
Projection	پروجکشن
Proposition	شکل
Quadrilateral	چوکور
Radius	نصف قطر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Rectangle	قائم الزوایا
Rectangle contained	سطح
Regular figure	رگیولر یا منتظم فگر
Rhomboid	رامبائڈ
Rhombus	رامبس
Right angle	زاویہ قائمہ
Right angled	قائم الزاویہ
Scalene	سکیلین
Segment of a circle	قطعۂ دائرہ
Semi circle	نصف دائرہ
Set	سیٹ
Square	مربع
Straight line	خط مستقیم
Superficies (Surface)	سطح
Superposition (coincidence)	انطباق
Supplement	سپلیمنٹ
Symmetrical figure	سمیٹریکل فگر
Trapezium	ٹریپیزیم
Trapezoid	ٹریپیزائڈ
Triangle	تکون
Vertex	راس

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

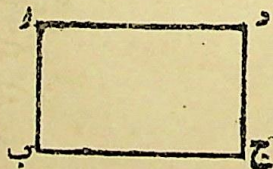
تعریفیں

اگر کسی متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔ تو اُس کے تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ [ک ۱ ش ۳۶

ایسی متوازی الاضلاع کو قائم الزوایا کہتے ہیں +

ایسی شکل کو اُن دو خطوں سے بنی ہوئی کہتے ہیں۔ جن سے اُس کا کوئی ایک قائمہ گھرا ہوتا ہے۔

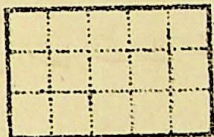
مثلاً قائم الزوایا ا ب ج د کو ا ب اد سے بنا ہوا کہا جائیگا + اب اد سے بنے ہوئے قائم الزوایئے کو مختصراً "اب اد کی سطح" کہا جاتا ہے۔

اس کو اس طرح بھی لکھتے ہیں "سطح اب اد" یا "اب ۰ اد" + قائم الزوایئے کو اُس کے مقابل کے دو حروف سے بھی تعبیر کرتے ہیں۔

مثلاً قائم الزوایئہ ا ب ج د کو سطح اج یا سطح د ب بھی کہ دیتے ہیں۔ یا شکل اج وغیرہ بھی کہ دیتے ہیں +

جب کسی قائم الزوایا شکل کے متصلہ ضلعوں کا طول ا اور ب

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اکائیاں ہوتا ہے۔تو اس کا رقبہ ا × ب اکائیاں ہوتا ہے۔ مثلاً
اگر متصل ضلعے ۵ اور ۳ انچ ہوں۔تو رقبہ ۱۵ مربع انچ ہوگا۔نیچے کی
شکل سے اس کی تشریح ہو جائیگی ؂

یہاں ضلعوں کو انچوں میں تقسیم کرکے نقاط تقسیم سے مقابل کے
ضلعوں کے متوازی خط کھینچنے سے کل شکل پندرہ حصوں میں تقسیم ہو
جاتی ہے۔جن میں سے ہر ایک ایک مربع انچ ہوگی ؂

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

علامات

ہم اس کتاب میں اختصار کے لئے مفصلۂ ذیل علامات استعمال کرینگے ÷

+ اور - حساب کے معمولی معنی میں استعمال ہونگے ÷

اکثر امتحانوں میں مذکورہ بالا علامات استعمال کرنے کی اجازت نہیں ہوتی ہے۔ایسی حالتوں میں علامات کی جگہ مناسب الفاظ لکھنے چاہئیں۔ مثلاً + کی جگہ "مع" لکھ سکتے ہیں ÷

جب علامات کے استعمال کے بارے میں ممانعت کی جاتی ہے۔تو یہ ممانعت صرف کتابی شکلوں کے حل سے ہی متعلق ہوتی ہے۔نئی شکلوں کے لئے علامات استعمال کرنے سے روکا نہیں جاتا ÷

"ا ~ ب" استعمال ہوگا بجائے "ا اور ب کا فرق"

"مربع اب پر" یا "اب²" " " "اب پر کا مربع"

"سطح اب ب ج" یا "اب . ب ج" " " "اب ب ج سے بنا ہوا قائم الزوایا"

"۲ اب" " " "دوچند اب"

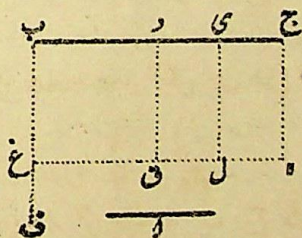
اسی طرح "۳ اب" "۴ اب" وغیرہ " " "سہ چند اب" "چہار چند اب" وغیرہ ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ا - مسئلہ

اگر دو مستقیم خطوں میں سے ایک خط کتنی حصّوں میں منقسم ہو - تو اُن دونو خطوں کی سطح اُن سطحوں کے مساوی ہوگی - جو غیر منقسم خط اور منقسم خط کے ہر ایک حصّے سے بنیں -

فرض کرو ا اور ب ج دو خط مستقیم ہیں -
جن میں سے ب ج نقاط د ی پر منقسم ہے -
تو سطح ا ب ج = سطح ا ب د + سطح ا د ی + سطح ا ی ج

ب ج پر ب ف عمود کھینچو - اور ب غ ا کے برابر کاٹ لو -
غ پر سے ب ج کا || ایک خط کھینچو -
د ی ج سے ب غ کے || د ق ی ل ج ہ کھینچو - جو غ سے کھینچے ہوئے || خط کو ق ل ہ پر ملیں -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو تمام ٹکڑیں قائم الزوایا ہونگی۔

ٹکڑ ب ہ = ٹکڑوں ب ق + د ل + ی ہ

لیکن ب ہ = ا ب ج کی سطح ∵ ب غ = ا

ب ق = ا ب د کی سطح ∵ ب غ = ا

د ل = ا د ی کی سطح ∵ د ق = ب غ = ا

ی ہ = ا ی ج کی سطح ∵ ج ہ = ب غ = ا

∴ ا . ب ج = ا . ب د + ا . د ی + ا . ی ج

نوٹ

۱۔ حساب میں بھی اس شکل کی صداقت درست ملتی ہے۔

مثلاً اگر ا ۵ انچ ہے

اور ب ج ۱۱ انچ جس کے حصے ۶ انچ و ۲ انچ و ۳ انچ ہوں۔

تو ظاہر ہے کہ ۵ × ۱۱ = ۵ × ۶ + ۵ × ۲ + ۵ × ۳

۲۔ جبر و مقابلے کی علامات سے یہ شکل اس طرح بیان ہو سکتی ہے۔ کہ

اگر ن اور ق دو خطوں کے طول ہوں۔

جن میں سے ق کے کئی حصے ا ب ج وغیرہ ہوں۔

تو ن × ق = ن × ا + ن × ب + ن × ج وغیرہ۔

جبر و مقابلے کے قاعدے سے یہ مساوات صاف ظاہر ہے ؁

حاصل ۱

اگر دو خطوں میں سے ہر ایک کئی حصوں میں منقسم

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہو۔ تو دونو خطوں کی سطح اُن سطحوں کے مجموعے کے مساوی ہوگی۔ جو پہلے خط کے ہر ایک حصّے اور دوسرے خط کے ہر ایک حصّے سے بنتی ہے ٭

حاصل ۲

کسی خط اور دو اور خطوں کے فرق کی سطح اُن سطحوں کے فرق کے مساوی ہوگی۔ جو پہلے خط اور باقی دونو میں سے ہر ایک سے بنتی ہیں ٭

یعنی اگر ا ب ج تین خط ہوں۔

تو ا × (ب - ج) = اب - اج

اور اگر کسی خاص صورت میں ا = ب

تو ا × (ا - ج) = (ا۲ - اج)

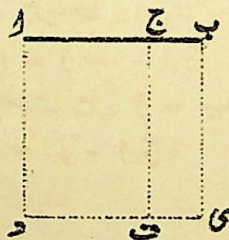
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم کوئی سے دو حصّوں میں منقسم ہو۔ تو کُل خط اور علیحدہ علیحدہ دو حصّوں کی سطحیں مل کر کُل خط پر کے مربّع کے مساوی ہونگی۔

فرض کرو اب ج پر منقسم ہے۔
تو سطح اب اج مع سطح اب ب ج = مربّع اب پر

ا ج ب
د ف ی

اب پر مربّع ا د ی ب بناؤ۔
ج سے ج ف ‖ ا د کا کھینچو۔
مگر اف + فگر ج ی = فگر ا ی
لیکن اف = سطح اب اج ∵ ا د = اب
ج ی = سطح اب ب ج ∵ ب ی = اب

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ سطح اب اج مع سطح اب ب ج = مربع الف پر۔

نوٹ

اس شکل کو اوّل شکل کا حاصل سمجھنا چاہئے۔ کیونکہ اگر اُس شکل میں دونو خط برابر مانے جائیں۔ اور دوسرے خط کو دو حصّوں میں منقسم فرض کیا جائے۔ تو یہ شکل نکل آتی ہے +

جبر و مقابلے میں اس شکل کی یہ صورت ہوگی۔

اگر ن کوئی خط ہو۔ اور ن = ا + ب

تو ن² = ن ا + ن ب

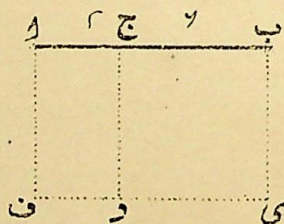
جبر و مقابلے کے قاعدے سے ثبوت ظاہر ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم کوئی سے دو حصّوں میں منقسم ہو - تو کل خط اور ایک حصّے کی سطح دونو حصّوں کی سطح اور حصّہء مذکور پر کے مربّع کے مساوی ہوگی -

فرض کرو اب ج پر منقسم ہے -
تو سطح اب ب ج = سطح اج جب مع مربّع ب ج پر -
ب ج پر مربّع ج د ی ب بناؤ -

ا پر سے اف ‖ ج د کا کھینچو -
جو ی د کو بڑھانے سے ف پر ملے -

ف د ی

نگر ای = نگروں اد اور ج ی
لیکن ای = سطح اب ب ج ∵ ب ی = ب ج
اد = سطح اج ج ب ∵ ج د = ب ج
اور ج ی ب ج پر کا مربّع ہے -
∴ سطح اب ب ج = سطح اج ج ب مع مربّع ب ج پر -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

اس شکل کو بھی شکل ۱ کا حاصل سمجھ سکتے ہیں - کیونکہ اُس شکل میں اگر دوسرا خط صرف دو ہی حصّوں میں منقسم ہو - اور اوّل خط اُس کے ایک حصّے کے برابر ہو - تو یہ شکل بن جاتی ہے ؛

اِس شکل کی جبر و مقابلے میں یہ صورت ہوگی -

اگر ن کوئی خط ہو - اور ن = ا + ب

تو ن ا = اب + ا^۲

ثبوت ظاہر ہے ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

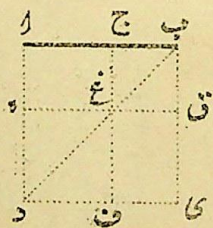
شکل ۴ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم کوئی سے دو حصّوں میں منقسم ہو۔ تو کل خط پر کا مربّع دونو حصّوں پر کے مربّعوں اور اُن حصّوں کی دوچند سطح کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو اب ج پر منقسم ہے۔

تو مربّع اب پر = مربّعوں اج و ج ب پر مع دوچند سطح اج ج ب

اب پر مربّع ادی ب بناؤ۔

ب د کو ملاؤ۔

ج پر سے ج غ ف || اد یا ب ی کا کھینچو۔

جو ب د کو غ پر کاٹے۔

غ پر سے ہ غ ق || اب یا دی کا کھینچو۔

∴ ج ف || ہے اد کا۔

∴ بیرونی $\widehat{\text{ج غ ب}}$ = مقابل کے اندرونی $\widehat{\text{اد ب}}$ [ک ا ش ۲۹

= $\widehat{\text{ا ب د}}$ (∵ اد = اب) [ک ا ش ۵

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ج غ = ج ب [ک ۱ ش ۶

لیکن ج ب = غ ق اور ج غ = ب ق [ک ۱ ش ۳۴

∴ ج ب ق غ اکوی لیٹرل ہے۔

اور ∵ یہ ▱ ہے۔ اور اس کا ج ب ق قائمہ ہے۔

∴ اس کے تمام زاوئے قائمے ہیں۔ [ک ۱ ش ۴۶ ح

∴ یہ فگر مربّع ہے۔

اسی طرح ہ ف بھی مربّع ہے اور = مربّع اج پر (∵ ہ غ = اج) [ک ۱ ش ۳۴

اب متمم ا غ = متمم غ ی

∴ ا غ غ ی ملکر = دوچند ا غ

= دوچند سطح اج ج ب (∵ ج غ = ج ب)

ان پر ج ق اور ہ ف زیادہ کرو جو = مربّعوں اج ج ب پر۔

∴ ا غ و غ ی و ج ق و ہ ف = مربّعوں اج و ج ب پر مع دوچند سطح اج ج ب

یعنی مربّع اب پر = مربّعوں اج و ج ب پر مع دوچند سطح اج ج ب

حاصل

اس سے ظاہر ہے۔ کہ جو متوازی الاضلاعیں کسی مربّع کے قطر کے گرد واقع ہوں۔ اُن میں سے ہر ایک مربّع ہوتی ہے ؞

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

اس شکل کو ہم ش ا ح ا کی ایک خاص صورت سمجھ سکتے ہیں۔
کیونکہ اگر وہاں دونو خط برابر ہوں۔ اور ہر ایک یکساں دو دو
حصّوں میں منقسم ہو۔ تو یہی شکل بن جاتی ہے ÷

اس کی جبر و مقابلے میں یہ صورت ہوگی۔

اگر ا ایک خط ہو۔ اور ب و ج دو حصّوں میں منقسم ہو۔

تو ا² = ب² + ج² + ۲ ب ج

∴ ا = ب + ج

طرفین کا مربّع لینے سے مساوات نکل آتی ہے ÷

عمل ذیل سے اس شکل کا ثبوت کسی قدر مختصر ہو جائیگا۔
ا ب پر مربّع ا د ی ب بناؤ۔ اور ا د میں ہ نقطہ لو۔ کہ

ا ہ = ب ج

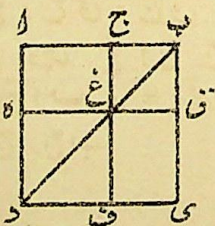
تو ہ د = ا ج

ج غ ف اور ہ غ ق مربّع کے
اضلاع کے متوازی کھینچو۔
تو ظاہر ہے۔ کہ تمام چوکور ہیں
قائم الزوایا ہیں۔ اور ب غ
اور غ د ب ج اور ج ا
پر کے مربّعے ہیں۔

اور ا غ اور غ ی مساوی نگرے ہیں۔ اور ہر ایک اج ضباج
کی سطح ہے۔

پس شکل حل ہو گئی ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مثالیں

۱- کسی خطِ مستقیم پر ا ب ج د ایسے نقطے ہیں - کہ
اب = ب ج = ج د
ثابت کرو - کہ اد^{2} = اج^{2} + ب د^{2} + ب ج^{2}

۲- اگر شکل ۴ کی فگر میں د ی ی ب پر ر اور م ایسے نقطے
لئے جائیں - کہ د ر = ی م = ب ج
تو ثابت کرو - کہ مربّع ہ ر م ج = اج^{2} + ج ب^{2}

۳- اگر ایک خطِ مستقیم کئی حصّوں میں منقسم ہو - تو کل خط پر
کا مربّع مساوی ہوگا تمام حصّوں پر کے مربّعوں اور اُن دوچند
سطحوں کے - جو ہر دو دو حصّوں سے بنتی ہیں ؞

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

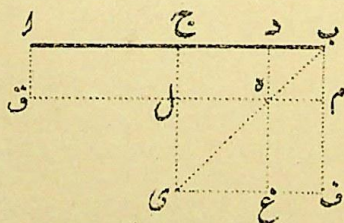
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۵ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم دو برابر اور دو نابرابر حصّوں میں منقسم ہو۔ تو نابرابر حصّوں کی سطح مع اُس خط پر کے مربّع کے جو نقاطِ تقسیم کے درمیان ہے۔ نصف خط پر کے مربّع کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو اب ج پر دو برابر حصّوں میں اور د پر دو نابرابر حصّوں میں منقسم ہے۔

تو سطح اد دب مع مربّع ج د پر = مربّع ج ب پر۔

ا ج د ب
ہ
ق ل م
ی غ ف

ج ب پر مربّع ج ی ف ب بناؤ۔
ب ی کو ملاؤ۔
د پر سے د ہ غ || ب ف کا کھینچو۔
جو ب ی کو ہ پر کاٹے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہ پر سے م ہ ل ق || ب ا کا کھینچو۔
ا پر سے ا ق || ی ج کا کھینچو۔
متمم ج ہ = متمم ہ ف
∴ ج م = د ف
لیکن ا ل = ج م (∵ ا ج = ج ب)
∴ ا ل = د ف
∴ ا ہ = د ف + ج ہ
لیکن ا ہ = سطح ا د د ب (∵ د ہ = د ب)
∴ سطح ا د د ب = د ف + ج ہ
لیکن مربّع ج د پر = ل غ
∴ سطح ا د د ب مع مربّع ج د پر = د ف + ج ہ + ل غ
= ج ف
= مربّع ج ب پر

حاصل

اس سے ظاہر ہے۔ کہ دو نا برابر خطوں (ا ج ج د) کے مربّعوں کا فرق اُس سطح کے برابر ہے۔ جو اُن خطوں کے مجموعے ا د اور فرق د ب سے بنی ہے۔

تع۔ اگر کسی متوازی الاضلاع میں سے اُس کے ایک وتر کے گرد کے دو متوازی الاضلاعوں میں سے کوئی ایک نکال دی جائے۔ تو باقی فگر کو نومن (Gnomon) کہتے ہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چنانچہ شکل ۵ کی شکل میں سطح ج ہ اور سطح د ف ملکر ایک
نومن بن جاتا ہے -
یا سطح ھ ل اور ل د ملکر ایک نومن بن جاتا ہے ؛

نوٹ

۱- اگر ا ج = ج ب = ل
اور ج د = ی
تو ا د = ل + ی
ب د = ل - ی

پس جبر و مقابلہ میں شکل ۵ کی صورت یہ ہوگی -
(ل + ی) (ل - ی) + ی^2 = ل^2
ضرب کے قاعدے سے ثبوت ظاہر ہے ؛

۲- شکل ۵ کا ثبوت شکل اوّل اور اُس کے حاصلوں سے بلا عمل
نکل سکتا ہے ؛

مثالیں

۱- ایک ہی پیریمیٹر کے قائم الزوایوں میں مربّع کا رقبہ سب سے
زیادہ ہوتا ہے ؛

۲- ثابت کرو- کہ ا د^2 ۔ د ب^2 = (۲ ج د ۰ ا ب)

۳- ایک خطِ مستقیم کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو- کہ ان کی
سطح زیادہ سے زیادہ ہو ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

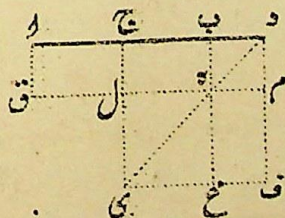
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۶ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم تنصیف کیا جائے اور کسی نقطے تک بڑھایا جائے۔ تو کل بڑھے ہوئے خط اور صرف بڑھوتری کی سطح مع اصلی نصف خط پر کے مربّع کے اُس مربّع کے مساوی ہوگی۔ جو بڑھوتری سمیت نصف خط پر بنا ہے۔

فرض کرو اب کی ج پر تنصیف ہوئی ہے۔ اور د تک بڑھایا گیا ہے۔

تو سطح اد دب مع مربّع ج ب پر = مربّع ج د پر۔

ا ج ب د
ق ل ۃ م
ی خ ف

ج د پر مربّع ج ی ف د بناؤ۔

د ی کو ملاؤ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ب پر سے ب ہ ع || د ف کا کھینچو۔
جو دی کو ہ۔ پر کاٹے۔
ہ پر سے ق ل ہ م || ا د کا کھینچو۔
ا پر سے ا ق || ج ی کا کھینچو۔
ا ل = ج ہ (∵ ا ج = ج ب)
= متمم ہ ف
دونو پر ج م زیادہ کرو۔
∴ ا م = ج م + ہ ف
لیکن ا م = سطح ا د ۔ د ب (∵ د م = د ب)
∴ سطح ا د ۔ د ب = ج م + ہ ف
طرفین پر ل ع زیادہ کرو۔ جو = مربع ج ب پر
∴ سطح ا د ۔ د ب مع مربع ج ب پر = ج م + ہ ف + ل ع
= ج ف
= مربع ج د پر

نوٹ

اس شکل کا ثبوت اس طرح بھی ہو سکتا ہے۔
ج ا کو ی تک بڑھاؤ۔ کہ ا ی = ب د
تو ج ی = ج د
اور ی ب = ا د

ی ا ج ب د

سطح ی ب ۔ ب د + مربع ج ب پر = مربع ج د پر [ک ۲ ش ۵
∴ سطح ا د ۔ د ب + مربع ج ب پر = مربع ج د پر (∵ ی ب = ا د)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۶ کی جبریہ صورت

اگر اج = ج ب = ل

اور ج د = ی

تو ب د = ی - ل

تو شکل کی صورت یہ ہوئی۔

(ی + ل) × (ی - ل) + ل۲ = ی۲

شکل ۵ اور ۶ کی جبریہ صورت پر غور کرنے سے معلوم ہوگا۔ کہ یہ دونو شکلیں در اصل ایک ہی ہیں +

اقلیدس کی کتابوں میں صرف خط کی مقدار بتائی جاتی ہے۔ سمت کا کچھ لحاظ نہیں کیا جاتا۔ مگر حال کی کتب ہندسہ میں خطوط اب اور ب ا میں تمیز کی جاتی ہے۔

مثلاً اگر خط اب کو مثبت سمجھا جائے۔ تو خط ب ا کو منفی خیال کرنا چاہئے۔

پس اب + ب ا = ۰

اگر خط اب پر کوئی نقطہ ج ہو۔

تو اج + ج ب = اب

ا ــــــــــــــــ ج ــــــــ ب

جب نقطہ ج اب کے اندر واقع ہو۔

تو مساوات بالا صاف ظاہر ہے۔

مگر جب ج اب کے باہر واقع ہو۔

ا ــــــــــــــــ ب ــــ ج

تو بھی حال کی کتب ہندسہ کی رو سے اوپر کی مساوات ٹھیک سمجھی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

213

جاتی ہے۔
کیونکہ یہاں ج ب منفی ہے۔
اس لئے اج + ج ب = اج - ب ج = اب
چنانچہ نقطہ ج اب کے اندر ہو۔ یا اُس کو کسی طرف بڑھا کر اُس پر ہو۔ دونو حالتوں میں کہتے ہیں۔ کہ نقطہ ج پر اب دو حصّوں میں منقسم ہے۔ اور اج اور ج ب اس کے دو حصے ہیں۔
اگر ج اب کے اندر واقع ہو۔ تو اُس تقسیم کو اندرونی تقسیم کہتے ہیں۔ اور اگر اب کو بڑھا کر اُس پر ہو۔ تو تقسیم بیرونی کہلاتی ہے +
تقسیم کے اس لحاظ سے ہم شکل ۵ اور شکل ۶ کو ایک ہی دعوے میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔
اگر کوئی خطِ مستقیم دو برابر حصّوں اور دو نا برابر حصّوں میں منقسم ہو (خواہ یہ تقسیم اندرونی ہو۔ خواہ بیرونی) تو نا برابر حصّوں کی سطح مع اُس خط پر کے مربّع کے جو نقاط تقسیم کے درمیان واقع ہے۔ نصف خط پر کے مربّع کے مساوی ہوگی +

شکل ۱

ا ج د ب

شکل ۲

ا ج ب د

جب نقطۂ تقسیم د اب کے اندر واقع ہے۔ تو شکل ۵ ہوگی۔
اور جب یہ نقطہ اب کے باہر ہے۔ تو چونکہ د ب منفی ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اس لئے اب دب کی سطح کو بھی منفی خیال کرنا چاہیئے۔
اس واسطے اوپر کے دعوے کے یہ معنی ہوتے ہیں۔

ج د^2 - اد دب = اج^2

یعنی ج د^2 = اج^2 + اد دب

اور یہی شکل ۶ کا دعوےٰ ہے ؞

مثالیں

۱-ثابت کرو-کہ

اد^2 ~ دب^2 = ۲(ج د ۰ اب)

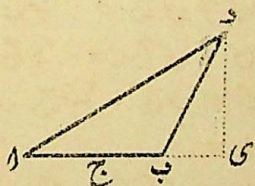
۲-خط اب نقطہ ج پر تنصیف ہوا ہے۔ اور کسی نقطہ د سے
اب پر عمود دی ڈالا گیا ہے-ثابت کرو-کہ

اد^2 ~ دب^2 = ۲(ج ی ۰ اب)

∵ اد^2 = ای^2 + ی د^2

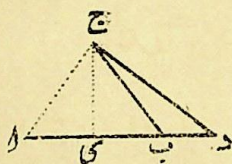
اور ب د^2 = ب ی^2 + ی د^2

∴ اد^2 ~ ب د^2 = ای^2 ~ ب ی^2

= ۲(ج ی ۰ اب)

۳- ا اور ب دو دیئے ہوئے نقطے ہیں - ن ایک ایسا نقطہ ہے-کہ
ان^2 ~ ب ن^2 ہمیشہ ایک ہی رہتا ہے-ثابت کرو-کہ ن کا
لوکس ایک خط ہے-جو اب پر عمود ہے ؞

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۴- ج ایک نقطہ دو دئے ہوئے نقطوں ا اور ب سے برابر فاصلے پر واقع ہے- اور د ایک نقطہ اب پر یا اس کو بڑھاکر اس پر ہے- تو ثابت کرو- کہ

اد ۰ دب = جب^۲ - جد^۲

اب پر جی عمود کھینچو-

تو ای = ی ب

جب^۲ = جی^۲ + ی ب^۲

جد^۲ = جی^۲ + ی د^۲

∴ جب^۲ - جد^۲ = ی د^۲ - ی ب^۲

= اد ۰ دب [ک ۲ ش ۵ و ۶

واضح ہو- کہ شکل ۵ و ۶ اس مثال کی خاص صورتیں ہیں- جب نقطہ ج اب پر واقع ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۷ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم کوئی سے دو حصوں میں منقسم ہو- تو کل خط پر کا مربع مع ایک حصے پر کے مربع کے کل خط اور اسی حصے کی دوچند سطح اور دوسرے حصے پر مربع کے مساوی ہوگا-

فرض کرو اب ج پر منقسم ہے-
تو مربعے اب و ب ج پر = دوچند سطح اب ب ج مع مربع ا ج پر
اب پر مربع ا د ی ب-
ا ج پر اسی طرف مربع اہ ق ج
اور ب ج پر دوسری طرف مربع ب ف غ ج بناؤ-
اور ہ ق کو بڑھاؤ- کہ ی ب سے ل پر ملے-

پس ج ا ہ اور ج ا د قائمے ہیں-

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ اہ اد پر منطبق ہوتا ہے۔

∵ اج ق قائمہ ہے۔

∴ ب ج ق بھی قائمہ ہے۔

لیکن ب ج غ بھی قائمہ ہے۔

∴ ج غ ج ق کی سیدھ میں ہے۔

∵ اب ف اور اب ی قائمے ہیں۔

∴ ب ف ب ی کی سیدھ میں ہے۔

∵ اد = اب

اور اہ = اج

∴ ہ د = ب ج

لیکن د ی = اب

∴ ہ ی = سطح اب ب ج

پھر ∵ ج ق = اج

اور ج غ = ج ب

∴ غ ق = اب

لیکن غ ف = ب ج

∴ غ ل = سطح اب ب ج

اب فگر ادی ف غ ج دو مربّعوں ای ب غ سے بنتی ہے۔

اور نیز فگروں ہ ی غ ل اق سے بھی بنتی ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ای و ب غ = ہ ی و غ ل د اق

∴ مربعے اب ب ج پر = دو چند سطح اب ب ج مع مربع اج پر۔

یہ شکل اس طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے۔

اب پر مربع ادی ب بناؤ۔

اد میں ہ ایسا نقطہ لو۔ کہ

اہ = ب ج

ہ اور ج پر سے ہ غ ق

ج غ ف || اضلاع مربع کے کھینچو۔

تو تمام شکلیں جو بنتی ہیں۔

قائم الزوایا ہیں۔

اور ہ د = اج

اور شکلیں ب غ اور غ د

ب ج اور اج پر کے مربعے ہیں۔

اور اق اور ب ف دونو اب اور ب ج کی سطح ہیں۔

لیکن ب د + ب غ = اق + ب ف + ہ ف

یعنی اب۲ + ب ج۲ = ۲ (اب · ب ج) + اج۲

نوٹ

ا۔ اس شکل کا ثبوت بغیر عمل کے بھی ہو سکتا ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اب^۲ = اج^۲ + بج^۲ + ۲ اج . ب ج .[ک ۲ ش ۴.

طرفین پر ب ج^۲ زیادہ کرو۔

اب^۲ + ب ج^۲ = اج^۲ + ۲ب ج^۲ + ۲ اج . ب ج

= اج^۲ + ۲ب ج (ب ج + اج)

= اج^۲ + ۲ اب . ب ج

۲۔ اس شکل کی جبریہ صورت یہ ہوگی۔

اگر اب = ل

ب ج = ی

تو ل^۲ + ی^۲ = ۲ل ی + (ل - ی)^۲.

ثبوت ظاہر ہے ؎

۳۔ اس شکل کا دعوے اس طرح بھی ہو سکتا ہے۔

دو خطوں کے فرق پر کا مربّع ان خطوں پر کے مربّعوں کے مجموعے سے بقدر دو چند سطح ان خطوں کے چھوٹا ہوتا ہے ؎

مثال

ثابت کرو۔ کہ مساوات ذیل شکل ۷ کی ہی صورت ہے۔

(ل - ی)^۲ = ل^۲ + ی^۲ - ۲ل ی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۸ ۔ مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم کوئی سے دو حصّوں
میں منقسم ہو۔ تو کل خط اور ایک حصّے
کی چار چند سطح مع دوسرے حصّے پر کے
مربّع کے اُس خطِ مستقیم پر کے مربّع
کے مساوی ہوگی۔ جو کل خط اور پہلے حصّے
کے مجموعے سے بنتا ہے۔

فرض کرو۔ کہ خطِ مستقیم اب ج پر منقسم ہے۔
تو ۴ سطح اب ب ج مع مربّع اج پر = مربّع اب اور ب ج
کے مجموعے پر۔

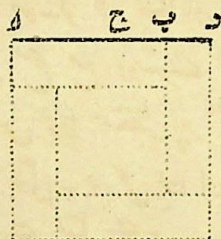
ا ج ب د

اب کو د تک بڑھاؤ۔ کہ ب د = ب ج
تو اد = اب اور ب ج کے مجموعے
اب مربّع اد پر = مربّعوں اب و ب د پر + ۲ سطح اب ب د [ک ۲ ش ۴]
= مربّعوں اب و ب ج + ۲ سطح اب ب ج (∵ ب د = ب ج)
= ۲ سطح اب ب ج + مربّع اج پر + ۲ سطح اب ب ج
= ۴ سطح اب ب ج + مربّع اج پر۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

۱- اد پر مربع بنا کر اور اُس کو ذیل کی طرح تقسیم کر کے شکل ۸ کی صداقت بدیہی ہو جاتی ہے ؛

۲- اس شکل کا دعوےٰ مختصراً اس طرح بیان ہو سکتا ہے -
دو خطوں پر کے مجموعے کا مربع ان کے فرق پر کے مربع سے بقدر اُن خطوں کی چہار چند سطح کے بڑا ہوتا ہے ؛

مثالیں

۱- ثابت کرو- کہ مساوات ذیل اس شکل کی تشریح کرتی ہے -

$$(ل + ی)^2 = (ل - ی)^2 + ۴ ل ی$$

۲- ثابت کرو- کہ اگر ایک قائم الزوایا ایک دئے ہوئے مربع کے مساوی ہو- تو جب وہ مربع کا کانگروئنٹ ہوگا- اس کا پیریمیٹر کم سے کم ہوگا ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۹ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم دو برابر اور دو نابرابر حصّوں میں منقسم ہو - تو دو نابرابر حصّوں پر کے مربّعے ملکر نصف خط پر کے مربّع اور اُس خط پر کے مربّع سے جو نقاط تقسیم کے درمیان ہے - دوچند ہونگے -

فرض کرو اب دو برابر حصّوں میں ج پر اور دو نابرابر حصّوں میں د پر منقسم ہے -

تو اد اور دب پر کے مربّعے ملکر اج اور ج د پر کے مربّعوں سے دوچند ہونگے -

ا ج د ب

مربّع اد پر = مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح اج ج د [ک ۲ ش ۴

= مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح ج ب ج د (∵ اج = ج ب)

∴ مربّعے اد و ب د پر = { مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح ج ب ج د + مربّع د ب پر

= { مربّعوں اج و ج د پر + مربّعوں ج ب و ج د پر [ک ۲ ش ۷

= { ۲ مربّع اج پر + ۲ مربّع ج د پر (∵ اج = ج ب)

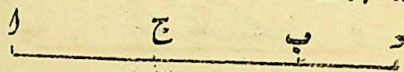
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۰ - مسئلہ

اگر ایک خطِ مستقیم تنصیف کیا جائے اور کسی نقطے تک بڑھایا جائے۔ تو کل بڑھے ہوئے خط پر کا مربّع اور صرف بڑھوتری پر کا مربّع ملکر اصلی نصف خط پر کے مربّع اور اُس خط پر کے مربّع سے جو نصف اور بڑھوتری کا مجموعہ ہے۔ دوچند ہونگے۔

فرض کرو اب کی ج پر تنصیف ہوئی ہے۔ اور د تک بڑھایا گیا ہے۔

تو اد اور دب پر کے مربّعے ملکر اج ج د پر کے مربّعوں سے دوچند ہونگے۔

ا ج ب د

مربّع اد پر = مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح اج ج د [ک ۲ ش ۴

= مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح ج ب ج د (∵ اج = ج ب)

∴ مربّعے اد و دب پر = { مربّعوں اج و ج د پر + ۲ سطح ج ب ج د + مربّع دب پر }

= { مربّعوں اج و ج د پر + مربّعوں ج ب و ج د پر [ک ۲ ش ۷ }

= { ۲ مربّعے اج پر + ۲ مربّعے ج د پر (∵ اج = ج ب) }

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

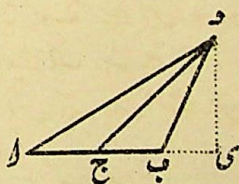
نوٹ

۱- اگر یہاں بھی اندرونی اور بیرونی تقسیم کا شمل شکل ۵ و ۶ کے لحاظ کر لیا جائے۔ تو شکل ۹ و ۱۰ دونو ایک ہی بن جاتی ہیں۔ اور ایک ہی دعوے میں دونو اس طرح بیان ہو سکتی ہیں۔

دو دئے ہوئے خطوں کے مجموعے اور فرق پر کے مربعے ملکر دونو خطوں پر کے مربعوں سے دوچند ہوتے ہیں۔

۲- ان کی جبریہ صورت یہ ہے۔

(ل + ی)^{2} + (ل - ی)^{2} = ۲ (ل^{2} + ی^{2})

۳- شکل ۹ و ۱۰ اس عام شکل کی خاص صورتیں ہیں۔

ج اب کا نقطۂ تنصیف ہے۔ اور د اور کوئی نقطہ ہے۔

اد^{2} + دب^{2} = ۲ (اج^{2} + ج د^{2})

اب پر یا اب کو بڑھا کر اُس پر دی عمود ڈالو۔

اد^{2} + دب^{2} = (ای^{2} + ی د^{2}) + (ب ی^{2} + ی د^{2}) [ک ۱ ش ۴۷

= (ای^{2} + ی ب^{2}) + ۲ ی د^{2}

= ۲ اج^{2} + ۲ ج ی^{2} + ۲ ی د^{2} [ک ۲ ش ۹ و ۱۰

= ۲ اج^{2} + ۲ (ج ی^{2} + ی د^{2})

= ۲ اج^{2} + ۲ ج د^{2} [ک ۱ ش ۴۷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فگر بالا اُس حالت کی ہے۔ جب کہ ی بڑھتے ہوئے اب پر ہے۔
طالب علم کو اور فگرس خود کھینچکر اپنا اطمینان کر لینا چاہیئے +

مثالیں

۱- اگر دو خطوں کا مجموعہ دیا ہؤا ہو۔ تو جب یہ خطوط برابر ہونگے - ان کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوگا۔

∵ اوپر کی فگر میں اد^2 + ب د^2 ہمیشہ < ۲ اج^2 یا $\frac{1}{2}$ اب^2

∴ جب ج د معدوم ہو جائے۔ یعنی

اد = ب د

تو اد^2 + ب د^2 کم سے کم ہوگا +

۲- ا اور ب دو دئے ہوئے نقطے ہیں۔ اور د ایک ایسا نقطہ ہے۔
کہ اد^2 + ب د^2 ہمیشہ ایک رہتا ہے۔

ثابت کرو۔ کہ د کا لوکس ایک دائرہ ہوگا۔ جس کا مرکز خط اب کا نقطۂ تنصیف ہے +

۳- کسی تکون کے ضلعوں پر کے مربعوں کا سہ چند مجموعہ اس کے تینوں میڈئینوں پر کے مربعوں کے چہار چند مجموعے کے مساوی ہوتا ہے +

۴- ا اور ج دو دئے ہوئے نقطے ہیں۔ اور د ایک ایسا نقطہ ہے۔ کہ

اد^2 = ۲ ج د^2

ثابت کرو۔ کہ د کا لوکس ایک دائرہ ہے۔
(اج کو ب تک بڑھاؤ۔ کہ ج ب = اج اور نوٹ ۲ سے کام لو)

دیگر ثبوت

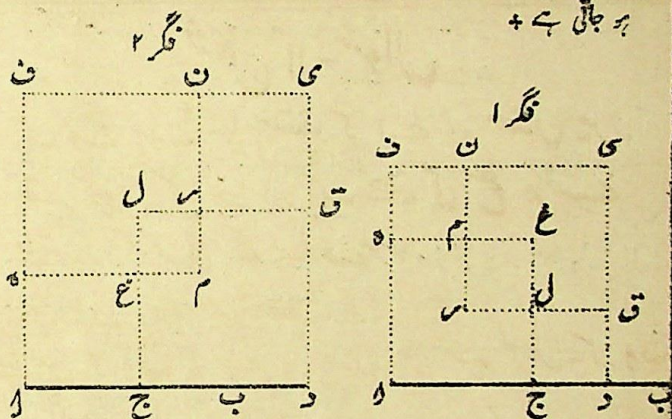
فگر ۱ و ۲ کے عمل سے شکل ۹ و شکل ۱۰ کی صداقت بدیہی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہو جاتی ہے +

شکل ۲

شکل ۱

اد و اج د ج د پر مربعے ای اغ ج ق بناؤ۔
ف ہ پر جو کہ ج د کے برابر ہے۔ مربع ف م بناؤ۔
ضرورت ہو۔ تو ن م اور ق ل کو بڑھا دو۔ تاکہ نقطہ س پر
مل جائیں۔

$$\text{س ی} = \text{اج}^2$$

$$\text{س غ} = \text{دب}^2$$

اب شکلوں سے ظاہر ہے۔ کہ

$$\text{اد}^2 + \text{دب}^2 = \text{ای} + \text{س غ}$$

$$= \text{اغ} + \text{س ی} + \text{ف م} + \text{ج ق}$$

$$= ۲\,(\text{اغ} + \text{ج ق})$$

$$= ۲\,(\text{اج}^2 + \text{ج د}^2)$$

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۱ - سوال

ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو - کہ کل خط اور ایک حصّے کی سطح دوسرے حصّے پر کے مربّع کے مساوی ہو -

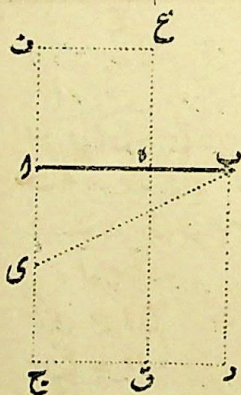
فرض کرو اب دیا ہوُا خطِ مستقیم ہے -
چاہتے ہیں - کہ اب کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کریں - کہ اب اور ایک حصّے کی سطح دوسرے حصّے پر کے مربّع کے مساوی ہو -
اب پر مربّع اب د ج بناؤ -
اج کی ی پر تنصیف کرو -
ب ی کو ملاؤ -
اور ج ا کو ف تک بڑھاؤ - کہ ی ف ی ب کے برابر ہو جائے -
اف پر مربّع اف غ ہ بناؤ -
تو اب کی نقطہ ہ پر ایسی تقسیم ہوگی - کہ سطح اب ب ہ = مربّع اہ پر -
غ ہ کو بڑھاؤ - کہ ج د سے ق پر ملے -
اب سطح ج ف ف ا مع مربّع ی ا پر = مربّع ی ف پر [ک ۲ ش ۶
= مربّع ی ب پر (∵ ی ف = ی ب)
= مربّعوں ی ا و اب پر [ک ۱ ش ۴۷

غ
ف
ا ہ ب
ی
ج ق د

نقش ۳ - ۱۰ - اصل - اصل - شش ۳ - اصل ۲ - عمدہ - علم ۱

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

∴ سطح ج ف ف ا = مربع اب پر۔

= اد^{۲}

لیکن ف ق = سطح ج ف ف ا (∵ ف غ = ف ا)

∴ ف ق = اد

∴ ف ہ = ہ د

یعنی مربع اہ پر = سطح ب د ب ہ

= سطح اب ب ہ (∵ ب د = اب)

نوٹ

۱۔واضح ہو۔کہ اس شکل میں ثابت ہوا ہے۔کہ

سطح ج ف ف ا = اج^{۲}

∴ خط ف ج نقطہ ا پر اسی طرح تقسیم ہوا ہے۔جس طرح کہ اب نقطہ ہ پر ہوا ہے ÷

۲۔اس شکل کا جبریہ عمل یہ ہوگا۔

اگر خط اب کا طول = ک

اور خط اہ کا طول = ل

تو بموجب شرط ک (ک۔ل) = ل^{۲}

∴ ل^{۲} + ک ل = ک^{۲}

اس درجۂ دوم کی مساوات کے حل کرنے سے

ل = $\frac{۱}{۲}$ک (± ماد ۔ ۱)

∵ یہاں ک > ل

∴ ماد کے ساتھ علامت جمع سمجھنی چاہیئے ÷

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۳-نتیجہ - اس شکل میں جس طرح خط اب تقسیم ہوا - اس کے بارے میں کہا کرتے ہیں - کہ اب کی نقطہ ہ پر میڈیکل (Medial) تقسیم ہوئی ہے +

میڈیل تقسیم کے معنی کو خط کی اندرونی اور بیرونی تقسیم کے لحاظ سے وسعت دے سکتے ہیں - مثلاً

(۱) جبکہ میڈیل تقسیم اندرونی ہو -

تو اصل خط اور چھوٹے حصے کی سطح بڑے حصے پر کے مربع کے مساوی ہوتی ہے -

اور یہی صورت شکل ۱۱ میں دکھائی گئی ہے +

(۲) جبکہ میڈیل تقسیم بیرونی ہو -

تو اصل خط اور بڑے حصے کی سطح چھوٹے حصے پر کے مربع کے مساوی ہوتی ہے -

اس کے یہ معنی ہیں - کہ خط اب کو بڑھا کر اس پر ایک ایسا نقطہ ہ معلوم کرو - کہ

سطح اب اہ = ب ہ^{2}

اس کا عمل ذیل میں دکھایا جاتا ہے -

اب پر اج مربع بنایا -

بج کی ی پر تنصیف کرو -

ی ج کو ف تک بڑھایا - کہ

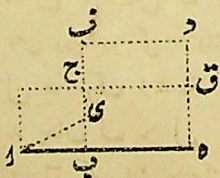
ی ف = ای

اور اب کو ہ تک بڑھایا - کہ

ب ہ = ب ف

ف د ج ق ی ا ب ہ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ہ نقطہ مطلوب ہے۔

ثبوت شکل ۱۱ کی طرح فوراً نکل آئیگا۔صرف شکل ۵ کی جگہ شکل ۶ کی مدد لینی ہوگی +

مثالیں

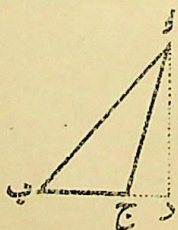
۱۔ دئے ہوئے خط ب ا کو نقطہ ہ تک بڑھاؤ۔کہ اس طرح بڑھائے ہوئے کل خط ب ہ اور دئے ہوئے خط ا ب کی سطح بڑھائے ہوئے حصّے ا ہ پر کے مربّع کے مساوی ہو +

۲۔ شکل ۱۱ کی فگر میں اگر ج ہ کو بڑھایا جائے۔ تو خط ف ب کو قائمے زاویوں پر کاٹیگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۲ - مسئلہ

اگر آبٹیوس زاویہ تکون میں کسی اکیوٹ زاویئے کے مقابل کے ضلع کو بڑھا کر اُس پر اکیوٹ زاویہ مذکور سے عمود ڈالا جائے - تو آبٹیوس زاویئے کے مقابل کے ضلع پر کا مربّع اُن ضلعوں پر کے مربّعوں کے جن کے درمیان زاویۂ آبٹیوس ہے - بقدر دو چند سطح اُس ضلع کی جس پر بڑھانے سے عمود گرتا ہے - اور اُس خط کی جو تکون کے باہر عمود اور زاویۂ آبٹیوس کے درمیان واقع ہے - بڑا ہوگا -

فرض کرو اب ج ایک تکون ہے -

جس کا ∠ اب ج آبٹیوس ہے -

ب ج کو بڑھا کر اُس پر ا سے

ا د عمود ڈالو -

تو مربّع اب پر کے مربّعوں اج و ج ب پر بقدر دو چند سطح ب ج ج د

ب د ج پر منقسم ہے -

∴ مربّع ب د پر = مربّعوں ب ج و ج د پر مع دو چند

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سطح ب ج ج د [ک ۲ ش ۴

دونو پر د ا کا مربّع زیادہ کر دو۔

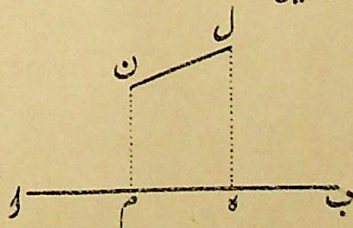
∴ مربّعے ب د و د ا پر = مربّعوں ب ج و ج د و د ا پر مع ۲ سطح ب ج ج د

یعنی مربّع ب ا پر = مربّعوں ب ج ج ا پر مع دوچند سطح ب ج ج د (∵ د̂ قائمہ ہے)

یعنی مربّع ب ا پر > مربّعوں ب ج و ج ا پر بقدر دوچند سطح ب ج ج د

نوٹ

۱۔ تع۔ اگر کسی نقطہ ن سے کسی خط ا ب پر ن م عمود ڈالا جائے۔ تو نقطہ م کو نقطہ ن کا خط ا ب پر پروجکشن Projection کہتے ہیں*

اسی طرح اگر ن ل کوئی خط ہو۔ ن م اور ل ہ خط ا ب پر عمود ڈالے جائیں۔ تو م ہ کو خط ن ل کا خط ا ب پر پروجکشن کہتے ہیں۔

ل ن ا م ہ ب

چنانچہ شکل ۱۲ میں ج د ضلع ا ج کا خط ب پر پروجکشن ہے*

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اب شکل ۱۲ کا دعوے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

آبٹیوس زاویہ تکون میں آبٹیوس زاوئے کے مقابل کے ضلع کا مربّع باقی دونو ضلعوں کے مربّعوں سے بڑا ہوگا بقدر دوچند اُس سطح کے جو ان دونو ضلعوں میں سے کسی ایک ضلع سے اور اُسی ضلع پر دوسرے ضلع کے پروجکشن سے بنتی ہے ۔:

مثال

ثابت کرو۔ کہ شکل ۱۲ کی فگر میں سطح ب ج ج د مساوی ہوگی اُس سطح کے جو اج اور اُس پر ب ج کے پروجکشن سے بنتی ہے ۔:

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۳۔ مسئلہ

اگر تکون میں کسی ایکیوٹ زاویے کو گھیرنے والے ضلعوں میں سے کسی ایک پر مقابل کے زاویے سے عمود ڈالا جائے۔ تو ایکیوٹ زاویے کے مقابل کے ضلع پر کا مربع ایکیوٹ زاویے کے گھیرنے والے ضلعوں پر کے مربعوں سے بقدر دوچند سطح اُس ضلع کی جس پر عمود ڈالا گیا ہے۔ اور اُس کے اُس حصے کی جو ایکیوٹ زاویے اور عمود کے درمیان واقع ہے۔ چھوٹا ہوتا ہے۔

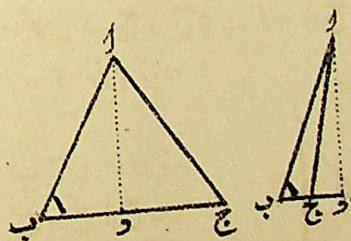
اوّل۔ فرض کرو اب ج کوئی تکون ہے۔ جس کا اب ج ایکیوٹ ہے۔ اگر اج ب ج پر عمود نہیں ہے۔ ا سے اد ب ج پر یا ب ج کو بڑھا کر اُس پر عمود ڈالو۔

ا
ب د ج

ا
ب ج د

تو مربع اج پر < مربعوں ج ب و ب ا پر بقدر دوچند

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سطح ج ب ب د

اب یا تو ب ج د پر منقسم ہے - یا ب د ج پر -

∴ دونو حالتوں میں مربعے ج ب و ب د پر = دو چند سطح ج ب ب د مع مربع د ج پر - [ک ۲ ش ۷

دونو پر د ا پر کا مربع زیادہ کرو -

∴ مربعے ج ب و ب د و د ا پر = دو چند سطح ج ب ب د مع مربعوں د ج و د ا پر -

∴ مربعے ج ب ب ا پر = دو چند سطح ج ب ب د مع مربع ج ا پر (∵ د پر کے زاوئے قائمے ہیں)

یعنی مربع ا ج پر < مربعوں ج ب و ب ا پر بقدر دو چند سطح ج ب ب د

دوم - اب فرض کرو - کہ ا ج ب ج پر عمود ہے -

تو مربع ا ج پر < مربعوں ج ب ب ا پر بقدر دو چند مربع ب ج پر -

مربع ا ب پر = مربعوں ب ج و ج ا پر (∵ ا ج ب قائمہ ہے)

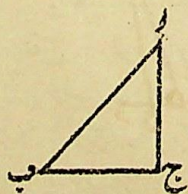
دونو پر ب ج پر کا مربع زیادہ کرو -

تو مربعے ا ب و ب ج پر = دو چند مربع ب ج پر مع مربع ا ج پر -

∴ مربع ا ج پر < مربعوں ج ب و ب ا پر بقدر دو چند مربع ب ج پر -

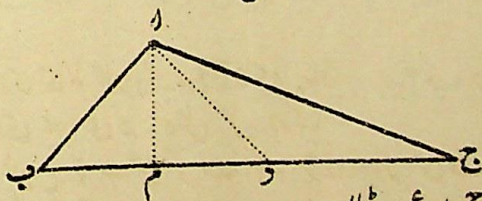
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

۱-اس کا دعوے بھی مختصراً اُسی طرح لکھ سکتے ہیں-جیسا کہ شکل ۱۲ کا دعوے اُس کے نوٹ ۱ میں مذکور ہُوا ہے ÷

۲ شکل ۱۲ و شکل ۱۳ دونو کا دعوے اکٹھا اس طرح لکھ سکتے ہیں- کسی تکون میں کسی ضلع پر کے مربّع اور باقی دونو ضلعوں پر کے مربّعوں کے مجموعے کا فرق مساوی ہوتا ہے اُس دوچند سطح کے جو اُن دونو ضلعوں میں سے ایک ضلع سے اور اسی ضلع پر دوسرے ضلع کے پروجکشن سے بنتی ہے ÷

مثال

اب ج ایک △ ہے-اور اد ضلع ب ج پر کا اُس کا میڈین ہے- تو ثابت کرو-کہ اب^2 + اج^2 = ۲ب د^2 + ۲ اد^2

حل

ام ب ج پر عمود ڈالو-

تو اد^2 + دب^2 = اب^2 + ۲ب د . دم [ک ۲ ش ۱۳

اور اد^2 + دج^2 = اج^2 - ۲ج د . دم [ک ۲ ش ۱۲

∴ ۲ اد^2 + ۲ب د^2 = اب^2 + اج^2 (∵ ب د = دج)

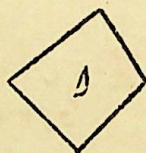
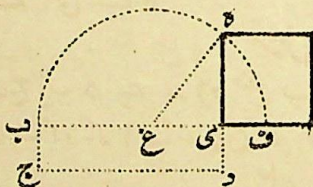
یہ مثال بہت ضروری ہے ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۴ - مسئلہ

ایک مربّع بناؤ - جو دی ہوئی مستقیمۃ الخطوط فگر کے مساوی ہو -

فرض کرو ا دی ہوئی مستقیمۃ الخطوط فگر ہے -
چاہتے ہیں ا کے مساوی مربّع بناویں -

ا کے مساوی قائم الزوایا ب ج د ی بناؤ -
تو اگر ب ی = ی د سوال حل ہوگیا -
لیکن اگر نہیں تو ب ی کو ف تک بڑھاؤ - کہ ی ف = ی د
ب ف کی غ پر تنصیف کرو -
غ کو مرکز اور غ ف کو نصف قطر مان کر نصف دائرہ ب ہ ف کھینچو -
ی سے ی ہ ب ف پر عمود کھینچو -
ی ہ پر کا مربّع ا کے مساوی ہوگا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ع ہ کو ملاؤ۔
ب ف ع پر دو برابر حصّوں میں اور می پر دو نابرابر حصّوں میں منقسم ہے۔
∴ سطح ب ی ی ف مع مربّع ی ع پر = مربّع ع ف پر [ک ۲ ش ۵
= مربّع ع ہ پر (∵ ع ہ = ع ف)
= { مربّعوں ی ع و ی ہ پر (∵ ع ی ہ قائمہ ہے)
ی ع پر کا مربّع نکال ڈالو۔
∴ سطح ب ی ی ف = مربّع ی ہ پر۔
یعنی ب د = مربّع ی ہ پر۔
∴ فگر ا = مربّع ی ہ پر۔

نوٹ

واضح ہو۔کہ اس شکل کا عمل زیادہ تر قائم الزوایا کے برابر مربّع بنانے کا ہے ÷

مثالیں

۱-ایک تکون کے مساوی مربّع بناؤ۔

حل

چونکہ تکون کا رقبہ اُس کے قاعدے اور عمود کی سطح کا نصف ہوتا ہے۔اس لئے شکل ۱۴ کے عمل سے اس کا بھی عمل ہوگیا ÷
۲-ایک ایسا مربّع بناؤ۔جو کسی دئے ہوئے مربّع کا دوچند۔سہ چند وغیرہ ہو ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

متفرق مثالیں

مسئلے

۱ اگر ن ا ب ج چار نقطے ایک خطِ مستقیم میں ن ب ج ا یا ن ا ج ب کی ترتیب سے ہوں - تو ثابت کرو - کہ

ن ا ۰ ب ج + ن ب ۰ ج ا = ن ج ۰ ا ب

اور ثابت کرو - کہ الجبرے کی مفصلۂ ذیل مساوات سے اس مسئلے کی صداقت ظاہر ہوتی ہے -

ا (ب - ج) + ب (ج - ا) + ج (ا - ب) = ۰

۲ اگر قائم الزاویہ تکون میں زاویۂ قائمہ سے وتر پر عمود ڈالا جائے - تو اس عمود پر کا مربع وتر کے اُن حصّوں کی سطح کے مساوی ہوگا - جن میں اُسے عمود مذکور نے تقسیم کیا ہے ؛

۳ خط ا ب ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے - کہ

ا ن = ۲ ن ب

اب اگر م کوئی اور نقطہ ہو - تو ثابت کرو - کہ

ا م^{۲} + ۲ ب م^{۲} = ا ن^{۲} + ۲ ب ن^{۲} + ۳ ن م^{۲}

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

انکوئوں ان م ب ن م پر ک ۲ ش ۱۲ و ۱۳ لگاؤ۔ اور یاد رکھو۔ کہ ان اور ن م کے پروجکشن کی سطح ب ن اور اسی پروجکشن کی سطح سے تگنی ہوگی) [ک ۲ ش ۱

اس سے ثابت کرو۔ کہ اگر ا اور ن مقررہ نقطے ہوں۔

اور ام۲ = ۳ ن م۲

تو م کا لوکس ایک دائرہ ہوگا۔ جس کا مرکز بڑھائے ہوئے ان میں ہوگا ؏

۳ خط اب میں ک ایک ایسا نقطہ لیا گیا ہے۔ کہ

اک = (ن - ۱) ک ب

(جہاں ن کوئی اکائی سے زیادہ صیح عدد ہے)

اگر م کوئی اور نقطہ ہو۔ تو ثابت کرو۔ کہ

ام۲ + (ن - ۱) ب م۲ = اک۲ + (ن - ۱) ب ک۲ + ن ک م۲

اس سے ثابت کرو۔ کہ اگر ام۲ = ن ک م۲

تو م کا لوکس ایک دائرہ ہوگا۔ جس کا مرکز بڑھائے ہوئے اک میں ہوگا ؏

۵ دو دئے ہوئے خطوں کی سطح ایک دئے ہوئے مربّع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو۔ کہ اگر ان دونو خطوں کا مجموعہ یا فرق دیا ہؤا ہو۔ تو خطوں کا طول معلوم ہو سکتا ہے ؏

۶ اب ج د ایک مربّع ہے۔ جس کے وتر ن پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ اج کو ی تک بڑھایا گیا ہے۔ کہ ج ی = اب ثابت کرو۔ کہ ای۲ = ۲ ان ی۲

۷ اگر اب کی ج پر ایسی تقسیم ہو۔ کہ اج۲ = ۲ ج ب۲

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ثابت کرو۔ کہ اب اور ج ب کا مجموعہ اب پر کے مربع کے قطر کے برابر ہوگا ؛

۸ خط اب ج د ی کی تقسیم اس طرح ہوئی ہے۔ کہ
اب = ب ج = ج د = د ی
اور ن ایک نقطہ اس کے باہر ہے۔ تو ثابت کرو۔ کہ
ن ا٢ + ن ی٢ = ٢(ن ب٢ + ن د٢)

۹ اگر ایک آئیسوسیلس تکون کے راس سے خط کھینچ کر اس کے قاعدے کی اندرونی یا بیرونی تقسیم کی جائے۔ تو اس خط کے اور تکون کے ایک ضلع پر کے مربعوں کا فرق قاعدے کے دونو حصوں کی سطح کے مساوی ہوگا ؛

۱۰ کسی تکون کے دونو ضلعوں کے مربعوں کا فرق اُس سطح کے دوچند کے مساوی ہوتا ہے۔ جو قاعدے اور اُسی قاعدے پر اُس کے میڈین کے پروجکشن سے بنتی ہے ؛

۱۱ کسی چوکور کے چاروں ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے اُس کے وتروں پر کے مربعوں مع ان وتروں کے نقاطِ تنصیف کے جوڑ پر کے مربع کے۔
اور اس سے ثابت کرو۔ کہ متوازی الاضلاع کے چاروں ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے دونو وتروں پر کے مربعوں کے ؛

۱۲ کسی تکون میں تینوں ضلعوں پر کے مربعوں کا سہ چند تینوں میڈینوں پر کے مربعوں کے چہار چند کے مساوی ہوتا ہے ؛

۱۳ اگر کسی قائم الزوایا کے اندر ایک نقطہ لیا جائے۔ تو کوئی سے دو مقابل کے زاویوں اور اُس نقطے کے جوڑوں کے مربعے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دوسرے مقابل کے زاویوں اور اُس نقطے کے جوڑوں کے مربّعوں کے مساوی ہونگے ✣

۱۴ اگر کسی خط کی میڈیل تقسیم ہوئی ہو۔ تو کل اصل خط اور چھوٹے حصّے پر کے مربّعوں کا مجموعہ مساوی ہوگا دوسرے حصّے پر کے مربّع کے سہ چند کے ✣

سوال

۱ ایک ایسے نقطے کا لوکس معلوم کرو۔ جس کا پروجکشن ایک دئے ہوئے محدود خط پر ایک دیا ہُوا نقطہ ہے ✣

۲ ایک دئے ہوئے خط کو اتنا بڑھاؤ۔ کہ کل بڑھائے ہوئے خط اور بڑھوتری کی سطح دئے ہوئے خط کے نصف پر کے مربّع کے مساوی ہو ✣

۳ ایک خط کی ایسی اندرونی یا بیرونی تقسیم کرو۔ کہ اُس کے حصّوں پر کے مربّعوں کا فرق ایک دئے ہوئے مربّع کے مساوی ہو ✣

۴ ایک ایسی قائم الزاویہ تکون بناؤ۔ کہ وتر اور ایک ساق کی سطح دوسری ساق پر کے مربّع کے مساوی ہو ✣

۵ △ اب ج کے ضلعوں اب ب ج ج ا کا طول ۶ و ۱۰ اور ۱۴ اکائیاں بالترتیب ہے۔ ضلعوں اب اور ج ب کو بڑھا کر اُن پر مقابل کے زاویوں سے عمود ڈالے گئے ہیں۔ اور یہ ضلعے عمودوں سے نقاط د و ی پر ملتے ہیں۔ تو اد اور ج ی کا طول معلوم کرو ✣

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اصطلاحیں

اکثر اصطلاحیں انگریزی ہی رکھی گئی ہیں۔ کیونکہ اردو میں ابھی ان کے لئے مناسب لفظ نہیں ملتے۔ اور اگر عربی۔ سنسکرت وغیرہ سے لفظ گھڑے بھی جاتے۔ تو اصطلاحیں طویل ہو جاتیں۔ اور اصل مطلب کو ٹھیک ٹھیک ظاہر نہ کر سکتیں۔

Angle in a segment . . . . قطعے میں کا زاویہ

Brocard Points . . . . نقاط براکارڈ

Chord . . . . کارڈ

Circumcircle . . . . سرکم سرکل

Circumradius . . . . سرکم ریڈیس

Concentric . . . . ہم مرکز

Conjugate angle . . . . کانجوگیٹ زاویہ

Contrapositive . . . . کانٹرا پازیٹو

Curve . . . . کرو

Cyclic . . . . سائی کلک

Envelope . . . . انویلپ

Equal circles . . . . مساوی دائرے

Excircle . . . . اکس سرکل

Incircle . . . . ان سرکل

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

Inverse	مقلوب
Inversion	قلب
Major conjugate	کانجوگیٹ کلاں
Method of Limits	قاعدۂ حد
Midcentre	مڈ سنٹر
Minor conjugate	کانجوگیٹ خرد
Nine Poit Circle	نائن پائنٹ سرکل
Orthocentre	آرتھو سنٹر
Point of contact	نقطۂ تماس
Polar	پولر
Pole	پول
Radical Axis	ریڈیکل اکسس
Radical centre	ریڈیکل سنٹر
Secant	سیکنٹ
Sector	سکٹر
Segment of a circle	قطعہ دائرہ
Simson's Line or Pedal	خط سمسن یا پیڈل
Tangent	خط مماس یا ٹینجنٹ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۱ مساوی دائرے وہ ہیں۔ جن کے قطر یا نصف قطر برابر ہوں +

یہ **تعریف** نہیں ہے۔ بلکہ ایک **مسئلہ** ہے۔ جس کی صداقت بدیہی ہے۔ کیونکہ اگر دائرے ایک دوسرے پر اس طرح رکھے جائیں۔ کہ اُن کے مرکز منطبق ہو جائیں۔ تو دائرے بھی منطبق ہو جائینگے۔ کیونکہ مرکزوں سے کھینچے ہوئے خطوط مستقیم برابر ہیں +

۲ جب کوئی خط مستقیم کسی دائرے سے ملے۔ اور بڑھانے پر اُسے کاٹے نہیں۔ تو کہا کرتے ہیں۔ یہ خط دائرے کو مس کرتا ہے۔ یا چھُوتا ہے +

جس نقطے پر یہ خط دائرے کو چھُوتا ہے۔ اُسے نقطۂ تماس کہتے ہیں +
اس خط کو دائرے کا اس نقطے پر کا خط مماس یا ٹینجنٹ (Tangent) کہتے ہیں +

۳ جو دائرے باہم ملیں۔ مگر ایک دوسرے کو کاٹیں نہیں۔ تو کہا کرتے ہیں۔ کہ یہ دائرے باہم مس کرتے ہیں +

حال کی کتب ہندسہ میں مس کرنے کے جو معنی لیئے جاتے ہیں۔ اُن کی تشریح اخیر میں نوٹ "دائرہ اور خط مماس" کے ذیل میں کی جائیگی +

۴ خطوط مستقیم "مرکز دائرہ سے برابر فاصلے" پر اس وقت کہلاتے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہیں - جب عمود جو ان پر مرکز سے ڈالے جائیں - باہم برابر ہوں +

۵ اور جس خط مستقیم پر اوروں سے بڑا عمود پڑتا ہے - کہا کرتے ہیں - کہ " وہ دوسروں کی نسبت مرکز سے دور ہے " +

۶ قطعہ دائرہ وہ شکل ہے - جو ایک خط مستقیم اور اُس قوس سے جسے اس خط نے کاٹا ہے - گھری ہوئی ہو +

محیط دائرہ کے کسی حصے کو قوس کہتے ہیں +

۷ قطعے میں کا زاویہ وہ ہے - جو ان دو مستقیم خطوں سے گھرا ہو - جو قطعہ مذکور کے محیط کے کسی نقطے سے قطعے کے قاعدے کے سروں تک کھینچے گئے ہوں +

۸ اور کہا کرتے ہیں - کہ یہ زاویہ اس قوس پر کھڑا ہے - جو زاویئے کے گھیرنے والے مستقیم خطوں کے درمیان واقع ہے +

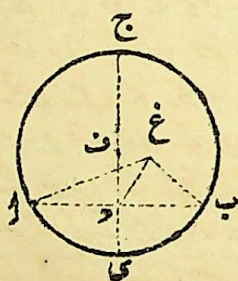
۹ اور دائرے کا سیکٹر (Sector) وہ شکل ہے - جو مرکز سے کھینچے ہوئے دو مستقیم خطوں اور ان کے درمیان کی قوس سے گھری ہوئی ہو +

۱۰ دائروں کے مشابہ قطعے وہ ہیں - جن میں کے زاویئے برابر ہوں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱- سوال

دئے ہوئے دائرے کا مرکز دریافت کرو

فرض کرو ا ب ج دیا ہوا ⊙ ہے۔
چاہتے ہیں۔کہ اس کا مرکز دریافت کریں۔

کوئی دو نقطے ا اور ب ⊙ پر لو۔
ا ب کو ملاؤ۔
ا ب کی د پر تنصیف کرو۔
د سے ا ب پر ج ی ⊥ ڈالو۔
جو دائرے سے ج اور ی پر ملے۔
ج ی کی ف پر تنصیف کرو۔
ف مرکز ہوگا۔
دائرے کے اندر کوئی ایسا نقطہ غ لو۔جو ج ی میں نہ ہو۔اور
غ ا غ د غ ب کو ملاؤ۔
دو △ ا د غ ب د غ میں
ا د = ب د
غ د مشترک ہے۔
اور ∠ ا د غ نا برابر ہے ∠ ب د غ کے
∴ غ ا نا برابر ہے غ ب کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ع مرکز نہیں ہے -
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ اَور کوئی نقطہ بھی جو دائرے کے
اندر ج ی کے باہر واقع ہو - مرکز نہیں ہو سکتا -
∴ ف (ج ی کا نقطۂ تنصیف) مرکز ہے
تع - دائرے کے محیط کے کوئی سے دو نقطوں کو ملانے سے جو خطِ
مستقیم پیدا ہوتا ہے - اُسے کارڈ (Chord) کہتے ہیں +

حاصل

اس سے یہ ظاہر ہے - کہ اگر کسی دائرے میں ایک کارڈ
کسی دوسرے کارڈ کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرے -
تو دائرے کا مرکز تنصیف کرنے والے کارڈ میں ہوتا ہے -
یا یوں کہو
اگر ایک دائرہ دو دئے ہوئے نقطوں پر سے گزرے -
تو اُس کا مرکز اُس خط پر ہوگا - جو ان نقطوں کے
جوڑ کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے -
پس
اگر کئی دائرے دو دئے ہوئے نقطوں پر سے گزریں - تو
اُن کے مرکز اُس خط پر واقع ہونگے - جو ان نقطوں کے
جوڑ کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

واضح ہو۔کہ دائرے کا لفظ بعض جگہ محیط کے معنی میں آتا ہے۔اور بعض مقام پر اس سے وہ ٹکڑ مراد ہوتی ہے۔جو محیط سے گھری ہوتی ہے۔محل وقوع سے بہ شبہ رفع ہو جاویگا +

مثالیں

۱۔ایک دائرے کے دو مرکز نہیں ہو سکتے +

۲۔دو دائرے جن کے مرکز ا اور ب ہیں۔ج پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ج پر سے ایک خط ن ج ق || اب کے کھینچو جو دائروں پر جاکر ختم ہو۔

ثابت کرو ن ق = ۲ ا ب

(جو خطوط ج ن ج ق کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتے ہیں۔ وہ ا اور ب پر سے بہ ترتیب گزرتے ہیں)

۳۔ایک چوکور دائرے کے اندر بنائی گئی ہے۔ثابت کرو۔کہ جو خطوط اس کے ضلعوں اور وتروں کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتے ہیں۔ وہ سب کے سب کانکرنٹ ہونگے۔یعنی ایک ہی نقطے پر سے گزرینگے + ثابت کرو۔کہ یہ امر دیگر مستقیمۃ الخطوط ٹکڑوں کے بارے میں بھی صحیح ہے +

۴۔چار نقطے ا ب ج د ہیں۔ثابت کرو۔کہ اگر اب اج اد کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرنے والے خطوط کانکرنٹ ہوں۔ تو ب ج ب د ج د کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرنے والے خطوط بھی کانکرنٹ ہونگے +

یہی بات پانچ نقطوں کے بارے میں بھی ثابت کرو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲ - مسئلہ

اگر کسی دائرے کے محیط پر دو نقطے لئے جائیں۔
تو خط مستقیم جو ان کو ملائیگا۔ دائرے کے اندر
واقع ہوگا۔ یا
دائرے کا ہر ایک کارڈ اس کے اندر ہوتا ہے

فرض کرو ا ب دو نقطے ایک ⊙ کے محیط پر ہیں۔
ان کا جوڑ ا ب ⊙ کے اندر ہوگا۔
فرض کرو ⊙ کا مرکز ج ہے۔ اور ن
کوئی نقطہ ا ب میں ہے۔
ج ا ج ن ج ب کو ملاؤ۔
نصف قطر ج ا = نصف قطر ج ب
∴ ج ا ب = ج ب ا
لیکن بیرونی ج ن ا > اندرونی مقابل کے ج ب ا
∴ ج ن ا > ج ا ب
∴ ج ا > ج ن
یعنی ج ن ⊙ کے نصف قطر سے چھوٹا ہے۔
∴ ن ⊙ کے اندر واقع ہے۔
اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ا ب میں کا اس کے
سروں کے سوا ہر ایک نقطہ ⊙ کے اندر واقع ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ا ب ⊙ کے اندر واقع ہے +

مثال

کسی آئیسوسیلس تکون کے راس سے اس کے قاعدے کے سرے اس پر کے کسی اور نقطے کی نسبت زیادہ فاصلے پر ہوتے ہیں +

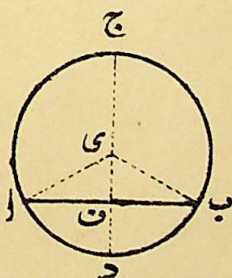
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳ مسئلہ

(۱) اگر کوئی خطِ مستقیم ایک دائرے کے مرکز پر سے گزر کر اُس کے اندر ایک اور مستقیم خط کی جو مرکز پر سے نہیں گزرتا۔ تنصیف کرے۔ تو وہ اسے قائمے زاویوں پر کاٹیگا۔

(۲) اگر کوئی خطِ مستقیم ایک دائرے کے مرکز پر سے گزر کر اُس کے اندر ایک اور مستقیم خط کو جو مرکز پر سے نہیں گزرتا۔ قائمے زاویوں پر کاٹے۔ تو وہ اس کی تنصیف کریگا۔

(۱) فرض کرو ا ب ج ایک ⊙ ہے۔ اور فرض کرو خط مستقیم ج د مرکز ی پر سے گزر کر ایک مستقیم خط ا ب کی جو مرکز پر سے نہیں گزرتا ف پر تنصیف کرتا ہے۔

تو ج د ⊥ ہے ا ب پر

ی ا ی ب کو ملاؤ۔

△ ا ف ی ب ف ی میں

ا ف = ب ف

ی ف مشترک ہے۔

اور نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ب

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ اف ی = ب ف ی

یعنی ج د ⊥ ہے اب پر

(۲) اب فرض کرو ج د مرکز ی پر سے گزر کر اب کو قائمے
زاویوں پر ف پر کاٹتا ہے۔

تو اف = ف ب

اسی عمل سے

نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ب

∴ ی اب = ی ب ا

دو △ ی اف ی ب ف میں

ی اف = ی ب ف

قائمہ ی ف ا = قائمہ ی ف ب

اور ضلع ی ف جو دونو میں برابر زاویوں کے مقابل ہے۔ مشترک
ہے۔

∴ اف = ف ب

نوٹ

واضح ہو۔ کہ اگر اس شکل کے دعوے کے دوسرے حصے میں سے "جو
مرکز پر سے نہیں گزرتا" نکال دیا جائے۔ تو بھی اس کی صداقت
میں کچھ فرق نہیں آتا۔ پس

دائرے کا ہر ایک قطر محور سیمیٹری ہوتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مثالیں

۱- متوازی کارڈوں کے سٹ کے نقاط تنصیف ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں -
یعنی متوازی کارڈوں کے نقاط تنصیف کا لوکس قطر ہوتا ہے +

۲- اگر ایک ٹرے پیزائڈ دائرے کے اندر بنائی جائے - تو وہ اپنے کسی ایک میڈین پر سمیٹریکل ہوگی -
یعنی یہ فگر تیشہ نما (ایکس) ہوگی (دیکھو صفحہ ۱۱۶ ک ۱) +

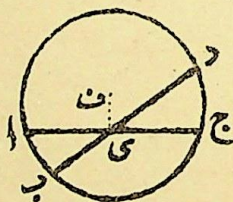
۳- ہر ایک ایکس کے گرد دائرہ بنایا جا سکتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۴ - مسئلہ

اگر ایک دائرے میں دو خطِ مستقیم جو مرکز پر سے نہیں گزرتے - ایک دوسرے کو کاٹیں - تو وہ ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرینگے -

فرض کرو ا ب ج د ایک ⊙ ہے -
اور اس میں ا ج ب د دو خط مستقیم ایک دوسرے کو نقطہ ی پر جو مرکز نہیں ہے - کاٹتے ہیں -
تو ا ج ب د ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرتے ہیں -
کیونکہ اگر ممکن ہو - فرض کرو
ا ی = ی ج اور ب ی = ی د
⊙ کا مرکز ف معلوم کرو -
نہ تو ا ج اور نہ ب د ف پر سے گزر سکتا ہے - اور نہ بجائے ی پر کے ف پر تنصیف ہو سکتا ہے -
ف ی کو ملاؤ -
∵ ا ی = ی ج
∴ ف ی ⊥ ہے ا ج پر [ک ۳ ش ۳
∵ ب ی = ی د
∴ ف ا ⊥ ہے ب د پر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

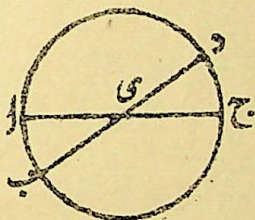
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ قائمہ ف ی ا = قائمہ ف ی ب

اور یہ باطل ہے +

دیگر ثبوت

فرض کرو - خطوط مستقیم اج ب د ⊙ اب ج د میں ایک دوسرے کی ی پر تنصیف کرتے ہیں۔

تو ی مرکز ہوگا۔

ضرور ہے - کہ جو خطوط مستقیم ی پر سے گزر کر اج ب د پر ⊥ ہیں۔ ان میں سے ہر ایک مرکز پر سے گزرے۔

∴ مرکز ی پر (جو ان عمودوں میں مشترک ہے) ہوگا۔

∴ اگر دو خطوط مستقیم ایک ⊙ میں ایک دوسرے کی تنصیف کریں۔ وہ دونو مرکز پر سے گزرینگے۔

∴ اگر دو خطوط مستقیم ایک دائرے میں دونو مرکز پر سے نہ گزریں۔ وہ ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرینگے +

نوٹ

جب دو شکلوں کے دعووں میں اس قسم کا علاقہ ہوتا ہے — جیسا کہ شکل ۱۴ اور اس کے دیگر ثبوت کے دعوے میں ہے - تو ایک

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل کو دوسری شکل کا کانٹرا پازیٹو (Contrapositive) کہتے ہیں۔
منطق میں ان کی صورت اس طرح ظاہر کی جاتی ہے -

اگر ا ب ہو تو ج د ہے

اگر ج د نہ ہو - تو ا ب نہیں ہے -

پس ایک دعوے دوسرے کا نتیجہ ہے - یعنی اگر ایک صحیح ہے - تو دوسرا بھی صحیح ہے +

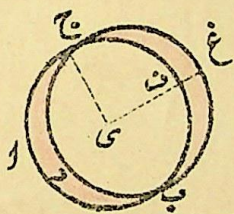
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۵ - مسئلہ

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں - تو ان کا ایک ہی مرکز نہیں ہوگا -

فرض کرو - دو ⊙ ا ب ج د ج غ ایک دوسرے کو ج پر کاٹتے ہیں -

ج
غ
ف
ی
ا
ب

ان کا ایک ہی مرکز نہیں ہوگا -
⊙ ا ب ج کا مرکز ی معلوم کرو -
اور کوئی خط مستقیم ی ف غ کھینچو -
جو دائروں کو ف اور غ پر کاٹے -

∴ نصف قطر ی ف = نصف قطر ی ج
∴ ی غ برابر نہیں ہے ی ج کے -
∴ ی ⊙ د ج غ کا مرکز نہیں ہے -

مثال

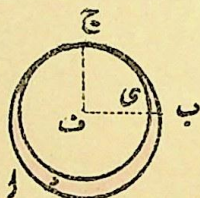
اس شکل کا کانٹرا پازیٹو لکھو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ٦ - مسئلہ

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندر سے مس کریں - تو ان کا ایک ہی مرکز نہیں ہوگا۔

فرض کرو ⊙ ا ب ج ج د ی ایک دوسرے کو اندر سے ج پر مس کرتے ہیں -

تو اُن کا ایک ہی مرکز نہیں ہوگا -

اندرونی ⊙ ج د ی کا مرکز ف دریافت کرو -

ف ج کو ملاؤ -

اور ⊙ ج د ی کا ایک اور نصف قطری ف کھینچو -

اور اسے بڑھاؤ - کہ ا ب ج کو ب پر کاٹے

نصف قطر ف ی = نصف قطر ف ج

∴ ف ب برابر نہیں ہے ف ج کے -

∴ ف ⊙ ا ب ج کا مرکز نہیں ہے

نوٹ

اگر دو دائروں کا ایک ہی مرکز ہو - تو انہیں ہم مرکز کہتے ہیں +

مثالیں

١ - شکل ٦ کا کانٹرا پازیٹو لکھو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲-اگر دو دائروں میں کوئی نقطہ مشترک ہو-تو وہ ہم مرکز نہیں ہیں-
اور اگر دو دائرے ہم مرکز ہوں -تو اُن میں کوئی نقطہ مشترک
نہیں ہو سکتا +

۳-دو ہم مرکز دائروں میں سے بڑے دائرے کا کوئی کارڈ ا د
چھوٹے دائرے کو ب اور ج پر کاٹتا ہے -تو ثابت کرو-کہ
اب = ج د
اور یہ بھی ثابت کرو-کہ ا ب اور ج د مرکز پر کے برابر
زاویوں کے مقابل ہیں +

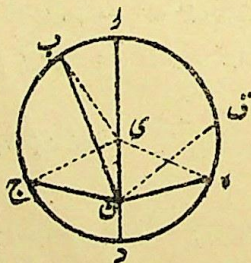
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۷ - مسئلہ

(۱) اگر کسی دائرے کے قطر پر مرکز کے سوا ایک نقطہ
لیا جلائے - تو اس سے جتنے خط محیط تک کھینچے جائینگے -
سب میں بڑا وہ ہوگا - جس پر مرکز ہے - اور قطر
کا باقی حصّہ سب سے چھوٹا ہوگا - اور باقیوں میں
سے جو قطر کے قریب ہے - اس سے بڑا ہوگا -
جو قطر سے دور ہے -

(۲) ایک ہی نقطے سے صرف دو ہی خط قطر کے دونو
طرف محیط تک برابر کھچ سکتے ہیں -

فرض کرو ⊙ ا ب ج کے قطر ا د پر ن ایک نقطہ ہے - جو
مرکز نہیں ہے -

(۱) ن سے جتنے خط مستقیم محیط
تک کھینچے جا سکتے ہیں -
سب میں بڑا ن ا ہے - جو مرکز
ی پر سے گزرتا ہے -
اور ن د سب سے چھوٹا ہے -
باقی دو ن ب ن ج میں سے
ن ب جو ن ا سے قریب تر ہے - دوسرے سے بڑا ہوگا -
ی ب اور ی ج کو ملاؤ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ب
ن ی کو دونو پر زیادہ کرو۔
∴ ن ا = ن ی + ی ب
لیکن ن ی + ی ب > تیسرے ضلعے ن ب
∴ ن ا > ن ب
پھر نصف قطر ی د = نصف قطر ی ب
∴ ی د < ی ن + ن ب
∴ باقی ن د < باقی ن ب
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ کسی اَور خطِ مستقیم سے بھی (جو ن سے محیط تک کھینچا جائے) ن ا بڑا ہے۔ اور ن د چھوٹا ہے۔
∴ تمام خطوں میں سے جو ن سے محیط تک کھینچے جائینگے ن ا سب سے بڑا اور ن د سب سے چھوٹا ہے ❖
پھر △ ن ی ب ن ی ج میں
ن ی ی ب = ن ی ی ج
اور ن ی ب > ن ی ج
∴ ن ب > ن ج
(۲) ن سے محیط تک کسی خط مستقیم ن ج کے برابر جو پہلے ہی کھینچا ہُوا ہے۔ اور صرف ایک ہی خط مستقیم کھنچ سکتا ہے۔
نصف قطر ی ہ کھینچو۔ کہ ن ی ہ = ن ی ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ن ہ کو ملاؤ۔

△ ن ی ہ ن ی ج میں

ن ی ی ہ = ن ی ی ج

اور ن ی ہ = ن ی ج

∴ ن ہ = ن ج

فرض کرو ن سے محیط تک ا د کے اُسی طرف جس طرف کہ ن ہ ہے۔ ایک اور خطِ مستقیم ن ق کھینچا گیا ہے۔

تو ن ق یا تو > یا < ن ہ [(۱)

∴ ن ق یا تو > یا < ن ج

∴ ن سے محیط تک اور کوئی خطِ مستقیم جو ن ج کے برابر ہو۔ نہیں کھینچا جا سکتا ہے ÷

مثالیں

۱۔ اگر ایک نقطے سے جو مرکز نہیں ہے۔ دو برابر خطوط مستقیم محیط تک کھینچے جائیں۔ تو وہ خط اس نقطے پر سے گزرتے ہوئے قطر کے ساتھ برابر زاویئے بنائینگے ÷

۲۔ ثابت کرو۔ کہ ہر دائرہ اپنے کسی قطر کے لحاظ سے سیمیٹریکل ہوتا ہے ÷

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۸۔ مسئلہ

(۱) اگر کسی دائرے کے باہر کوئی نقطہ لے لیا جائے۔ اور اس سے محیط تک خطوط مستقیم کھینچے جائیں۔ جن میں سے ایک مرکز پر سے گزرے۔ تو اُن خطوں میں سے جو کانکیو (Concave) محیط پر گرتے ہیں۔ سب میں بڑا وہ ہوتا ہے۔ جو مرکز پر سے گزرتا ہے۔ اور باقیوں میں سے مرکز پر سے گزرنے والے خط سے قریب کا اُس سے دُور کے سے بڑا ہوتا ہے۔

(۲) اُن خطوں میں سے جو کانوَیکس (Convex) محیط پر گرتے ہیں۔ سب سے چھوٹا وہ ہوتا ہے۔ جو دائرے کے باہر کے نقطے اور محیط کے درمیان ہے۔ اور باقیوں میں سے سب سے چھوٹے کے قریب کا اُس سے دُور کے سے ہمیشہ چھوٹا ہوتا ہے۔

(۳) اسی نقطے سے سب سے چھوٹے خط کے دونو طرف محیط تک صرف دو ہی خطِ مستقیم برابر کھنچ سکتے ہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو ⊙ ا ب ج کے باہر ن ایک نقطہ ہے۔

(۱) اُن تمام خطوط مستقیم میں سے جو ن سے کانکیو محیط تک کھینچے جا سکتے ہیں۔ ن ا جو مرکز ی پر سے گزرتا ہے۔ سب سے بڑا ہے۔ اور باقی دو ن ب ن ج میں سے ن ب جو ن ا سے قریب تر ہے۔ دوسرے سے بڑا ہوگا۔

نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ب

∴ ن ا = ن ی + ی ب

لیکن ن ی + ی ب > تیسرے ضلعے ن ب

∴ ن ا > ن ب

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ن ا کسی اور خط مستقیم سے بھی (جو ن سے کانکیو محیط تک کھینچا جائے) بڑا ہے۔

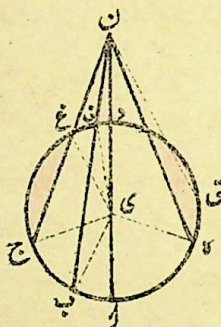
∴ ن ا ایسے تمام خطوط میں سب سے بڑا ہے۔

△ ن ی ب ن ی ج میں
ن ی ی ب = ن ی ی ج
اور ∠ ن ی ب > ∠ ن ی ج

∴ ن ب > ن ج

(۲) اُن تمام خطوط مستقیم میں سے جو ن سے کانویکس محیط تک کھینچے جا سکتے ہیں ن د جو ن ا کا ⊙ سے باہر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کا حصّہ ہے۔سب سے چھوٹا ہے۔اور باقی دو ن ف ن غ
میں سے ن ف جو ن ا کے قریب تر ہے دوسرے سے
چھوٹا ہوگا۔

ی ن > ی ن + ف ن
اور نصف قطر ی د = نصف قطر ی ف
∴ ن د > ن ف

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔کہ ن د > کسی اَور خطِ مستقیم
سے بھی جو ن سے کانوِیکس محیط تک کھینچا جائے۔
∴ ن د ایسے تمام خطوں میں سب سے چھوٹا ہے۔

△ ن ی ف ن ی غ میں } ن ی ی ف = ن ی ی غ
اور ن ی ف > ن ی غ (زاویے)

∴ ن ف > ن غ

(۳) ن سے محیط تک ن ج کے برابر جو پہلے سے کھچا ہوا ہے۔
صرف ایک ہی خطِ مستقیم کھچ سکتا ہے۔
نصف قطر ی ہ کھینچو۔کہ ن ی ہ = ن ی ج (زاویے)
ن ہ کو ملاؤ۔

△ ن ی ہ ن ی ج میں } ن ی ی ہ = ن ی ی ج
اور ن ی ہ = ن ی ج (زاویے)

∴ ن ہ = ن ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

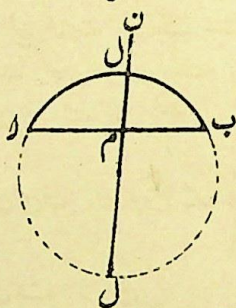
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو ن سے محیط تک ا د کے اُس طرف جس طرف کہ ن ہ ہے - ایک اور خطِ مستقیم ن ق کھینچا گیا ہے -

[(۱) اور (۲) تو ن ق یا تو > یا < ن ہ

∴ ن ق یا تو > یا < ن ج ٭

تعریف

اگر ا ب دائرے کی کوئی قوس ہو - اور کسی نقطہ ن سے ایک ایسا خط کھینچا جائے - کہ کارڈ ا ب کو م پر اور قوس کو ل پر کاٹے - تو اگر ن ل ن م سے بڑا ہوگا - تو قوس ا ل ب نقطہ ن کی طرف کانکیو کہلائیگی - اور اگر ن ل ن م سے چھوٹا ہوگا - تو قوس ا ل ب ن کی طرف کانوکیس کہلائیگی ٭

مثالیں

۱- دائرے کے محیط کا ہر مقام مرکز کی طرف کانکیو ہوتا ہے ٭

۲- اگر کسی دائرے کے بیرونی نقطے سے دو ٹینجنٹ کھینچے جائیں - تو نقاط تماس کا جوڑ دائرے کو دو حصّوں میں تقسیم کرتا ہے - جن میں سے دیئے ہوئے نقطے کے قریب کا حصّہ نقطۂ مذکور کی طرف کانکیو ہوگا - اور دوسرا حصہ اس کی طرف کانوکس ٭

۳- ا اور ب دائرے کے باہر نقطے ہیں - محیط پر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو - کہ ا ب اور ب ج پر کے مربعوں کا مجموعہ کم

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سے کم ہو۔
(فرض کرو ی مرکز ہے۔ اور ن اب کا نقطۂ تنصیف ہے۔
تو نقطۂ مطلوب ی ن پر واقع ہوگا)

۴۔ اوپر کی مثال میں ج ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ کہ اج اور
ج ب پر کے مربّعوں کا مجموعہ زیادہ سے زیادہ ہو ؛

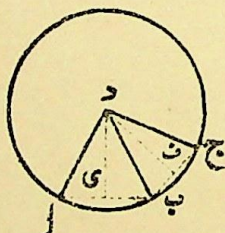
۵۔ ا اور ب دو دائرے ہیں۔ جو آپس میں ملتے نہیں۔ ا کے
محیط سے ب کے محیط تک بڑے سے بڑا اور چھوٹے سے
چھوٹا خط مستقیم کھینچو۔
(چوکور کے کوئی سے تین ضلعے ملکر چوتھے سے بڑے ہوتے ہیں)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۹ - مسئلہ

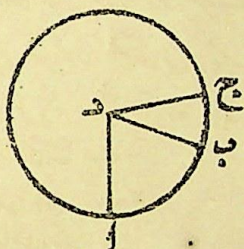
اگر دائرے کے اندر کوئی ایسا نقطہ لیا جائے - کہ اس سے دو سے زیادہ برابر خط محیط تک کھینچے جائیں - تو وہ نقطہ دائرے کا مرکز ہوگا -

فرض کرو ⊙ اب ج کے اندر د ایسا نقطہ ہے - کہ اس سے محیط تک تین برابر خطوط مستقیم
دا دب دج کھینچے جاسکتے ہیں -
تو د مرکز ہوگا -

اب ب ج کو ملاؤ -
اب ب ج کی ی ف پر تنصیف کرو - اور دی دف کو ملاؤ -
△ دی ا دی ب میں
دی ی ا = دی ی ب
دا = دب
∴ دی ا = دی ب
یعنی دی ⊥ ہے اب پر
∴ مرکز ی د میں ہے - [ک ۳ ش ۱، ح
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ مرکز ف د میں بھی ہے -
∴ د مرکز ہے - کیونکہ ی د اور ف د دونو میں صرف یہی نقطہ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مشترک ہے۔

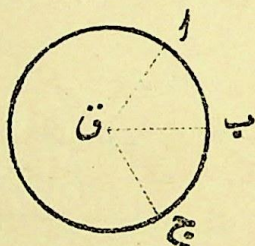
دیگر ثبوت

د پر سے قطر کھینچو۔
اب اگر د مرکز نہیں ہے۔ تو د سے محیط تک دو سے زیادہ برابر خط نہیں کھینچے جا سکتے۔ اک ۳ ش ۷
∴ د مرکز ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۰۔مسئلہ

ایک دائرے کا محیط دوسرے دائرے کے محیط کو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹ سکتا۔

اگر ممکن ہو۔فرض کرو۔کہ ایک محیط دوسرے کو تین نقطوں ا ب ج پر کاٹتا ہے۔

دونو دائروں میں سے ایک کا مرکز ق دریافت کرو۔

اور ق ا ق ب ق ج کو ملاؤ۔

تو نصف قطر ق ا = نصف قطر ق ب = نصف قطر ق ج

∴ ق دوسرے ⊙ کا مرکز ہے۔

اور یہ ناممکن ہے ٭

[ک ۳ ش ۹

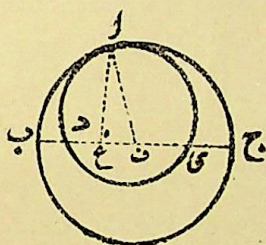
[ک ۳ ش ۵

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۱ - مسئلہ

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندر سے مس کریں۔ تو ان کے مرکزوں کا جوڑ بڑھائے جانے پر نقطۂ تماس پر سے گزریگا۔

فرض کرو - جو ⊙ اب ج ادی ایک دوسرے کو اندر سے نقطہ ا پر مس کرتے ہیں۔

تو جو خط مستقیم ان کے مرکزوں پر سے کھینچا جائیگا۔ ا پر سے گزریگا۔

بیرونی ⊙ اب ج کا مرکز ف معلوم کرو۔

ف کو ⊙ ادی کے اندر کے کسی نقطہ غ سے ملاؤ۔

اور فرض کرو - کہ ف غ بڑھائے جانے پر محیطوں کو د ب پر کاٹتا ہے۔

غ ا کو ملاؤ۔

تو غ ا > غ ب [ک ۳ ش ۷

∴ غ ا > غ د

∴ غ ⊙ ادی کا مرکز نہیں ہے۔

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ اگر ف غ محیطوں کو ا کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

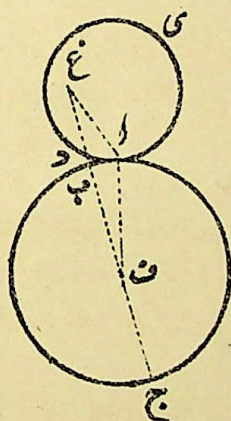
سوا کسی اور نقطے پر کاٹے -
تو غ ⊙ ا د ی کا مرکز نہیں ہے -
∴ خط مستقیم جو ف کو ⊙ ا د ی کے مرکز سے ملاتا ہے -
بڑھائے جانے پر ا پر سے گزریگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۲ مسئلہ

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو باہر سے مس کریں۔
ان کے مرکزوں کا جوڑ نقطۂ تماس پر سے گزریگا۔

فرض کرو۔ دو ⊙ اب ج ا د ی ایک دوسرے کو باہر سے نقطہ ا پر مس کرتے ہیں۔
ان کے مرکزوں کا جوڑ ا پر سے گزریگا۔
⊙ ا ب ج کا مرکز ف معلوم کرو۔
ف کو ⊙ ا د ی کے اندر کے کسی نقطہ غ سے ملاؤ۔
فرض کرو ف غ محیطوں کو ب د پر کاٹتا ہے۔
غ ا کو ملاؤ
تو غ ا > غ ب [ک ۳ ش ۸
∴ غ ا > غ د
∴ غ ⊙ ا د ی کا مرکز نہیں ہے۔
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ ف غ محیطوں کو ا کے سوا کسی اور نقطے پر کاٹے۔ تو غ مرکز نہیں ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ خط مستقیم جو ث کو ⊙ ادی کے مرکز سے ملاتا ہے - ا پر سے گزرتا ہے +

نوٹ

(۱) شکل (۱۱) و (۱۲) کا ثبوت مفصلۂ ذیل اُن کے کانٹراپازیٹو سے بھی ہو سکتا ہے -

یعنی

اگر دو دائرے جن کے مرکز ا ب ہیں - ایسے نقطہ ج پر ملیں - جو خط ا ب پر نہیں ہے - تو وہ دائرے باہم مس نہیں کرینگے +

(۲) شکل (۱۱) و (۱۲) کے ثبوت سے معلوم ہو جاتا ہے - کہ دو دائرے اندر یا باہر کی طرف صرف ایک ہی نقطے پر مس کر سکتے ہیں - کیونکہ اگر کوئی دوسرا نقطۂ تماس ممکن ہو - تو دائروں کے مرکزوں کا جوڑ اُس نقطے پر سے بھی گزرنا چاہئے - اور یہ ناممکن ہے +

مثالیں

ا - دو دائرے ایک دوسرے کو اندر کی طرف مس کرتے ہیں - اگر نقطۂ تماس پر سے گزرتے ہوئے قطر پر کوئی عمود کھینچا جائے - تو عمود کے جو حصے دائروں کے درمیان واقع ہونگے - وہ باہم برابر ہونگے +

۲ - اگر دو دائرے آپس میں مس کریں - تو ان کے نصف قطروں کا مجموعہ یا فرق اُن کے مرکزوں کے فاصلے کے برابر ہوتا ہے +

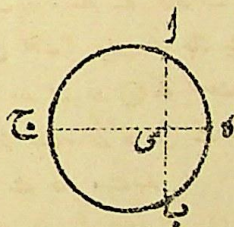
۳ - ایسے دائرے بناؤ - جو دو دئے ہوئے ہم مرکز دائروں کو مس کریں - اور ثابت کرو - کہ اُن دائروں کے مرکزوں کے لوکس دائرے ہوتے ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۳ مسئلہ

ایک دائرہ دوسرے دائرے کو ایک سے زیادہ
نقطوں پر مس نہیں کر سکتا - خواہ اندر سے
مس کرے - خواہ باہر سے -

اگر ممکن ہو - فرض کرو - کہ ایک ⊙ دوسرے ⊙ ا ب ج کو نقطوں ا ب
پر اندر سے یا باہر سے مس کرتا ہے -

ا ب کو ملاؤ -
ا ب کی ی پر تنصیف کرو - اور ا ب پر ج ی ہ ⊥ کھینچو -
تو ا ب ہر ایک دائرے میں واقع ہے - [ک ۳ ش ۲
∴ دونو ⊙ کے مرکز ج ی ہ یا ج ی ہ بڑھے ہوئے پر واقع
ہیں - [ک ۳ ش ۱
یعنی دو ایسے دائروں کے مرکزوں کا جوڑ جو ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں -
نقاط تماس ا ب میں سے کسی پر سے بھی نہیں گزرتا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور یہ باطل ہے ٭

دیگر ثبوت

٭ مرکزوں کا جوڑ ہر ایک نقطۂ تماس پر سے گزرنا چاہیئے۔
∴ ا ب وہ خط ہونا چاہیئے۔
∴ ا ب کے دو نقاط تنصیف (یعنی دونو ⊙ کے مرکز) ہیں۔
اور یہ باطل ہے ٭

نوٹ

دو دائروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے جو مختلف حالتیں ہوسکتی ہیں۔ اُن کو یہاں مختصراً بیان کیا جاتا ہے۔
فرض کرو۔کہ ق اور س دو ⊙ کے نصف قطر ہیں۔
اور ق س سے بڑا ہے۔ اور د ان کے مرکزوں کا فاصلہ ہے۔
تو شکل ۱۱ و ۱۲ سے ظاہر ہے۔کہ
(۱) اگر دو دائرے اندر کی طرف مس کریں۔ تو ق - س = د
(۲) اگر دو دائرے باہر کی طرف مس کریں۔ تو ق + س = د
اور اِن سے با[illegible] ظاہر ہوگا۔کہ
(۳) اگر ایک ⊙ دوسرے کے اندر واقع ہو۔
لیکن اُس سے ملے نہیں۔ تو ق-س > د
اور اسلیئے ق + س بھی د سے بڑا ہوگا۔
(۴) اگر ایک ⊙ دوسرے کے باہر واقع ہو۔ اور اس سے ملے نہیں۔
تو ق + س اور اس لیئے ق - س بھی د سے چھوٹا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہوگا +

(۵) ایک ⊙ دوسرے کو کاٹے - تو

ق - س د سے چھوٹا ہوگا - اور ق + س د سے بڑا ہوگا +

ان مشلوں کے عکس بھی درست ہیں +

طالب علم کو چاہئے - کہ یہ عکس خود ثابت کرے +

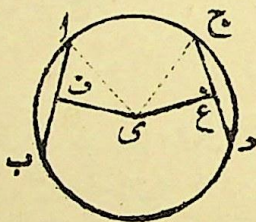
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۴ - مسئلہ

(۱) کسی دائرے میں برابر کارڈ مرکز سے برابر فاصلے پر ہوتے ہیں۔

(۲) کسی دائرے میں مرکز سے برابر فاصلے پر جو کارڈ ہوتے ہیں۔ وہ باہم برابر ہوتے ہیں۔

فرض کرو اب ج د ایک دائرے کے جس کا مرکز ی ہے۔ کارڈ ہیں۔

اور فرض کرو اب ج د پر ی ف ی غ ⊥ کھینچے گئے ہیں۔

اور اُن کی تنصیف کرتے ہیں ف غ پر۔

(۱) اگر اب = ج د

تو ی ف = ی غ

∵ اب = ج د

∴ اف = ج غ [∵ اب اور ج د کی تنصیف ہوتی ہے

اب مربعے ی ف ف ا پر = مربع ی ا پر [ک اش ۴۷

= مربع ی ج پر [∵ ی ج = ی ا

= مربعوں ی غ غ ج پر

لیکن مربع ف ا پر = مربع ج غ پر [∵ اف = ج غ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ مربع ی ف پر = مربع ی غ پر

∴ ی ف = ی غ

(۲) اگر ی ف = ی غ

تو اب = ج د

∴ مربعے ی ف ف ا پر = مربعوں ی غ غ ج پر [جیسا (۱) میں

لیکن مربع ی ف پر = مربع ی غ پر [∵ ی ف = ی غ

∴ مربع ف ا پر = مربع غ ج پر

∴ ف ا = غ ج

∴ اب = ج د

مثالیں

۱- ایک ⊙ کے برابر کارڈوں کے نقاط تنصیف ایک ہم مرکز دائرے پر واقع ہوتے ہیں +

۲- ک ۳ ش ۱۴ کو △ ی اب ی ج د کو ایک دوسرے پر منطبق کرکے ثابت کرو +

(△ ی ج د کو گھماؤ- یہاں تک کہ ی ج ی ب پر پڑے)

۳- ک ۳ ش ۱۴ میں ا ج اور ب د کو ملا کر ثابت کرو - کہ ا ج || ب د کا +

۴- ایک دائرے کے دو کارڈ جن کی ایک ہم مرکز ⊙ تنصیف کرتا ہے- باہم برابر ہوتے ہیں +

۵- ایک دائرے کا مرکز ی ہے- اور اب اور ج د دو برابر کارڈ ہیں- ان پر دو نقطے ہ اور ق ایسے لئے گئے ہیں-

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کہ اہ = ج ق - تو ثابت کرو - کہ ی ہ = ی ق

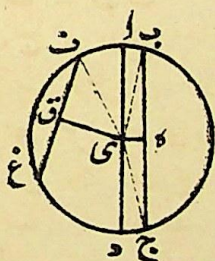
۶ - ا ب ج د ایک دائرے کے برابر کارڈ ہیں - اس کا ایک ہم مرکز ⊙ اُن کے ن ق اور ر س حصوں کو کاٹ لیتا ہے -
تو ثابت کرو - کہ ن ق = ر س
اس کا عکس بھی ثابت کرو +

۷ - ایک ⊙ کے اندر کے کسی نقطے سے ایک دیئے ہوئے کارڈ کے برابر کارڈ کھینچو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۵- مسئلہ

(۱) دائرے میں قطر سب سے بڑا خط مستقیم ہوتا ہے۔
(۲) باقی کارڈوں میں سے مرکز کے قریب کا کارڈ
اس سے دور کے کارڈ سے بڑا ہوتا ہے۔
(۳) بڑا کارڈ چھوٹے کی نسبت مرکز سے قریب تر
ہوتا ہے۔

فرض کرو ا ب ج د ایک ⊙ ہے۔ جس کا ا د قطر اور ی
مرکز ہے۔
اور دو کارڈوں ب ج ف غ
میں سے فرض کرو ب ج
ی کے قریب تر ہے۔

(۱) ا د بڑا ہے کسی کارڈ ب ج
سے جو قطر نہیں ہے۔
(۲) ب ج > ف غ
ب ج ف غ پر ی ہ ی ق
⊥ کھینچو
اور یہ ان کی تنصیف ہ اور ق پر ہوتی ہے۔
ی ب ی ج ی ف کو ملاؤ۔
∵ نصف قطر ا ی ی د = نصف قطر ب ی ی ج
∴ ا د = ب ی ی ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

لیکن ب ی ی ج > ب ج

∴ اد > ب ج

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ کہ اد ہر ایک کارڈ سے جو قطر نہیں ہے۔ بڑا ہے۔

پھر مربعے ی ہ ہ ب پر = مربع ی ب پر [ک اش ۴۷

= مربع ی ف پر [∵ ی ب = ی ف

= مربعوں ی ق ق ف پر [ک اش ۴۷

لیکن مربع ی ہ پر < مربع ی ق پر [∵ ی ہ < ی ق

∴ مربع ہ ب پر > مربع ق ف پر

∴ ہ ف > ق ف

∴ ب ج > ف غ

(۳) اب فرض کرو۔ کارڈ ب ج > کارڈ ف غ

پھر اسی عمل سے ی ہ < ی ق

∵ ب ج > ف غ

∵ ہ ب > ق ف

∴ مربع ہ ب پر > مربع ق ف پر

لیکن جیسا کہ (۲) میں مربعے ی ہ ہ ب پر = مربعوں ی ق ق ف پر

∴ مربع ی ہ پر < مربع ی ق پر

∴ ی ہ < ی ق

مثالیں

۱۔ △ ی ب ج کو ی پر گھما کر یہاں تک کہ ی ہ ی ق پر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پڑھے - اس شکل کو ثابت کرو۔
(تک اش ۴۴ سے مدد لو)

۲-تک ۳ ش ۱۵ کی فگر میں ی ن غ کو ملا کر ثابت کرو۔ کہ
ب ی ج > ف ی غ

۳-دائرے کا ایک کارڈ دوسرے کے برابر اس سے بڑا یا چھوٹا ہوتا ہے - جب کہ اول کارڈ کے مقابل کا مرکز پر کا زاویہ دوسرے کارڈ کے مرکز پر کے زاویے کے برابر اس سے بڑا یا چھوٹا ہوتا ہے +

۴- ایک ⊙ کے دو برابر کارڈوں کے نقاط تنصیف پر سے ایک تیسرا کارڈ کھینچا گیا ہے -ثابت کرو- کہ اس کارڈ کے دو حصے جو برابر کارڈوں اور محیط کے درمیان آپڑے ہیں-برابر ہونگے+

۵-دائرے کے اندر کے ایک دئے ہوئے نقطے پر سے چھوٹے سے چھوٹا کارڈ کھینچو+

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۶- مسئلہ

جو خط مستقیم دائرے کے قطر کے سرے سے اس پر قائمہ زاوئے بناتا ہوا کھینچا جائے - وہ دائرے کے باہر واقع ہوگا - اور قطر کے سرے سے اس خط مستقیم اور محیط کے درمیان کوئی مستقیم خط ایسا نہیں کھچ سکتا - کہ دائرے کو نہ کاٹے -

(۱) فرض کرو - کہ د ایک ⊙ کا مرکز ہے - اور ا ایک نقطہ اس کے محیط پر ہے -

اور ا پر سے خط مستقیم ہ ا ق ⊥ د ا پر کھینچو -

تو ہ ا ق ⊙ کے باہر واقع ہوگا -

کوئی نقطہ ن ہ ق میں لو - اور د ن کو ملاؤ -

∵ د ا ن قائمہ ہے -

∴ د ن ا < قائمہ

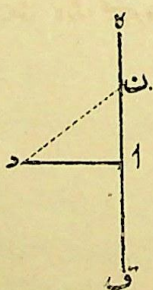
∴ د ا ن > د ن ا

∴ د ن > د ا

∴ ن ⊙ سے باہر واقع ہے -

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے - کہ ہ ق پر ا کے سوا اور کوئی نقطہ بھی ⊙ سے باہر واقع ہوگا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۲) اب فرض کرو۔ کہ خط مستقیم ہ ا ق جو ایک ⊙ کے (جس کا مرکز د ہے) نصف قطر د ا کے سرے ا سے کھینچا گیا ہے۔

د ا پر ⊥ نہیں ہے۔

ہ ق پر د ی ⊥ ڈالو۔

اور ق ہ میں سے ا سے دوسری طرف ی ب برابر ی ا کے کاٹو۔

اور د ب کو ملاؤ۔

△ د ی ب د ی ا میں

د ی ی ب = د ی ی ا

اور قائمہ د ی ب = قائمہ د ی ا

∴ د ب = د ا

∴ ب محیط پر واقع ہے۔

∴ ا ب ⊙ کے اندر واقع ہے۔

اور ∴ ہ ق ⊙ کو کاٹتا ہے۔

حاصل ۱

جو خط مستقیم دائرے کے قطر کے سرے سے قطر کے ساتھ زاویئے قائمے بناتا ہُوا کھینچا جاتا ہے۔ وہ دائرے کو مس کرتا ہے۔

حاصل ۲

کوئی خط مستقیم دائرے کو ایک سے زیادہ نقطوں پر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مس نہیں کرسکتا۔

(کیونکہ اگر کوئی خط مستقیم محیط سے دو نقطوں پر ملے - تو اس خط کا ان دو نقطوں کے درمیان کا حصّہ دائرے کے اندر واقع ہوگا)

حاصل ۳

ایک نقطے پر صرف ایک ہی خط مستقیم دائرے کو مس کرسکتا ہے۔

نوٹ

۱- حال کی کتب ہندسہ میں جو مس کرنے کے معنی کو وسعت دیجاتی ہے- اُس کی تشریح اخیر میں نوٹ" دائرہ اور خط مماس" کے ذیل میں کی گئی ہے۔

۲- جب ایک سِٹ کے تمام خطوط کسی کرؤ (Curve) (منحنی خط) پر ٹینجنٹ ہوتے ہیں - تو کہا کرتے ہیں- کہ یہ خطوط کرؤ کو اِنویلپ (Envelope) کرتے ہیں- اور یہ کرؤ اس خطوط کے سِٹ کا انویلپ کہلاتا ہے-

چنانچہ ک ۳ ش ۱۶ میں ثابت ہوا ہے- کہ

کسی مقررہ نقطے سے جو خطوط برابر فاصلے پر واقع ہوتے ہیں- وہ اُس دائرے کو انویلپ کرتے ہیں- جس کا مرکز نقطۂ مذکور ہے- اور نصف قطر فاصلۂ مذکور ہے۔

مثالیں

۱- دائرے کے تمام برابر کارڈ اُس ہم مرکز دائرے کو مس کرتے ہیں- جو ان کے نقاط تنصیف پر سے گذرتا ہے۔

پس یہ ہم مرکز دائرہ ان کارڈوں کا انویلپ ہے-

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲- دائرے کے کسی قطر کے سروں پر جو ٹینجنٹ ہوتے ہیں - وہ
باہم متوازی ہوتے ہیں -
اس کا عکس بھی ثابت کرو +

۳- ایک دائرہ ایک دیئے ہوئے خط کو ایک دیئے ہوئے نقطے پر مس
کرتا ہے - اور اس خط پر دیئے ہوئے نقطے پر سے گزرتا ہوا
عمود کھینچا گیا ہے - یہ عمود دائرے کے مرکز کا لوکس ہوگا +

۴- ایک ایسا دائرہ کھینچو جو ایک دیئے ہوئے خط کو دیئے ہوئے نقطے
پر مس کرے - اور ایک اور دیئے ہوئے نقطے پر سے گزرے +

۵- دو دیئے ہوئے متوازی خطوں کو مس کرنے والے جتنے دائرے
چاہیں - کھینچ سکتے ہیں +

۶- دائرے جن کے مرکز ایک دیئے ہوئے خط مستقیم پر ہوں -
اور جن کے نصف قطر ایک ہی دیئے ہوئے طول کے
ہوں - دو خطوں کے انویلپ ہونگے - جو دیئے ہوئے خط کے
متوازی ہیں +

۷- دو دیئے ہوئے ہم مرکز دائروں کو مس کرنے والے جتنے دائرے
چاہیں - کھینچ سکتے ہیں +

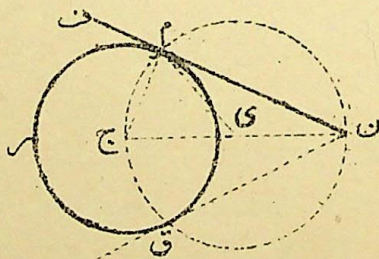
۸- برابر دائرے جن کے مرکز ایک دیئے ہوئے دائرے پر ہوں -
عموماً دو دائروں کو جو دیئے ہوئے دائرے کے ہم مرکز ہیں - انویلپ
کرینگے +
یہ بھی بتاؤ - کہ ان دونو ہم مرکز دائروں میں سے ایک کس
حالت میں نقطہ بن جائیگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۷ مسئلہ

ایک دیئے ہوئے نقطے سے جو کسی دیئے ہوئے دائرے کے باہر یا محیط پر ہو - ایک خط مستقیم کھینچو - جو اس دائرے کو مس کرے -

(۱) فرض کرو - کہ ایک دیا ہوا نقطہ ن ⊙ م ق ر کے باہر ہے - چاہتے ہیں - کہ ن سے ٹینجنٹ (خط مماس) ⊙ م ق ر کا کھینچیں -
م ق ر کا مرکز ج معلوم کرو -
ن ج کو ملاؤ - ن ج کی ی پر تنصیف کرو -
مرکز ی سے ی ج یا ی ن کے فاصلے پر ایک ⊙ بناؤ - جو م ق ر کو م اور ق پر کاٹے -

ن م کو ملاؤ -
ن م ⊙ م ق ر پر ٹینجنٹ ہوگا -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ن م کو ت تک بڑھاؤ۔

∵ ی م = ی ن

∴ ی م ن = ی ن م

اسی طرح ی م ج = ی ج م

∴ کل ج م ن = ی ن م ی ج م

= بیرونی ج م ت

∴ ہر ایک قائمہ ہے۔

∴ ن م ⊙ کو م پر مس کرتا ہے۔ [ک ۳ ش ۱۶

(۳) اگر دیا ہوُا نقطہ محیط پر ہو۔ جیسا کہ م ہے۔ تو خط مستقیم م ن جو نصف قطر ج م پر قائمے زاویے بناتا ہوُا کھینچا گیا ہے۔ ٹینجنٹ مطلوب ہوگا +

دیگر عمل

ن ج کو ملاؤ۔ کہ یہ خط ⊙ کو ا پر کاٹے۔ اور ن پر سے گزرتا ہوُا ایک ہم مرکز دائرہ کھینچو۔ ا سے ن ج پر عمود ا ب س کھینچو۔ جو ⊙ کو ب اور س پر کاٹے۔ ب ج اور ج س کو ملاؤ۔ کہ ⊙ م ق ر کو م اور ق پر کاٹیں۔ ن م اور ن ق کو ملاؤ۔ تو یہ دونو خطوط ⊙ م ق ر کے ٹینجنٹ ہونگے۔

(ن م ج اور ن ق ج کو قائمے ثابت کرنے سے یہ سوال حل ہو جائیگا)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

نوٹ

ظاہر ہے۔کہ ک ۳ ش ۷۱ کی شکل میں ن ق کو ملانے سے ن ق دوسرا ٹینجنٹ ہو جاتا ہے۔

پس ثابت ہوا۔کہ

کسی دائرے کے بیرونی نقطے سے دو ٹینجنٹ اور صرف دو ہی ٹینجنٹ کھینچے جا سکتے ہیں +

مثالیں

۱۔دائرے کے کسی بیرونی نقطے سے اس پر جو دو ٹینجنٹ کھینچے جاتے ہیں۔وہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

کتاب کی شکل میں △ ن م ج اور ن ق ج کو ہر ایک اعتبار سے برابر ثابت کرو۔ [ک ا ش ۷۴

۲۔ن ج کا جوڑ ٹینجنٹوں کے درمیانی زاویے کی تنصیف کرتا ہے +

۳۔اگر کئی دائرے دو دیئے ہوئے مستقیم خطوں کو مس کریں - تو سب دائروں کے مرکز اُن دو خطوں پر ہونگے۔جو ان دونو مستقیم خطوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس کا مفصلۂ ذیل عکس بھی ثابت کرو۔

کسی زاویے کی تنصیف کرنے والے خط پر کے ایک نقطے کو مرکز مان کر ایسا دائرہ کھینچ سکتے ہیں۔جو ان خطوط کو مس کرے - جس سے یہ زاویہ بنتا ہے۔

پس

کسی ایسے دائرے کے مرکز کا لوکس جو دو باہم کاٹنے والے خطوں کو مس کرے۔وہ دو خطوط مستقیم ہوتے ہیں۔جو دونو باہم

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کاٹنے والے خطوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

۴- کے ۳ مش ۱۷ کی فگر میں ن کو مرکز اور ن م یا ن ق کو نصف قطر مان کر دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ج م اور ج ق اس دائرے پر ٹینجنٹ ہونگے۔

یہ بھی ثابت کرو۔ کہ ج ن م ق کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتا ہے۔

۵- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو قائمے زاویوں پر کاٹیں۔ تو ان کے نصف قطروں پر کے مربعوں کا مجموعہ ان کے مرکزوں کے جوڑ پر کے مربع کے مساوی ہوگا۔

اس کا عکس بھی ثابت کرو۔

۶- ایک دیئے ہوئے نقطے پر سے ایک دیئے ہوئے خط مستقیم کے برابر دائرے کا کارڈ کھینچو۔

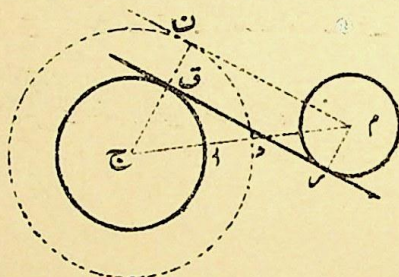
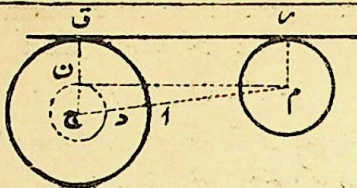
کسی خاص طول کے کارڈ کسی دائرے کو انویلپ کرتے ہیں۔ پس دیئے ہوئے نقطے سے اس دائرے پر جو ٹینجنٹ کھینچا جائیگا۔ وہی مطلوبہ کارڈ ہوگا۔

۷- دو دیئے ہوئے دائروں پر مشترک ٹینجنٹ کھینچو۔

واضح ہو۔ کہ جب ایک دائرہ دوسرے کے باہر ہوگا۔ تو چار ٹینجنٹ کھچ سکینگے۔ دو اندر کی طرف اور دو باہر کی طرف۔ اور اگر ایک دائرہ دوسرے کو کاٹے۔ تو صرف دو ہی مشترک ٹینجنٹ کھچ سکینگے۔

فرض کرو۔ دو دائروں کے مرکز ج اور م ہیں۔ ان کے نصف قطروں کے (جو نا برابر ہیں) مجموعے یا فرق کو نصف قطر مان کر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج مرکز والے
دائرے کا ہم مرکز
دائرہ کھینچو۔ اور
م سے ان دائروں
پر م ن ٹینجنٹ
کھینچو۔ ج ن کو
ملاؤ۔ کہ ج ن
یا بڑھایا ہوا ج ن
ج والے دائرے
کو ق پر کاٹے۔
اور م سے ج ن
کا م س || کھینچو۔ تو ق س مشترک ٹینجنٹ ہوگا۔

۸۔ اگر دو اندرونی یا بیرونی مشترک ٹینجنٹ ایک دوسرے کو کاٹیں۔ تو نقطۂ تقاطع اُس خط پر ہوگا۔ جو ان دائروں کے مرکز پر سے گزرتا ہے۔

(کیونکہ ہر ایک دائرے کا مرکز اس خط پر ہونا چاہئے۔ جو دونو ٹینجنٹوں کے درمیانی زاویئے کی تنصیف کرتا ہے)

تع۔ ن سے دائرے پر جو ٹینجنٹ کھینچے جاتے ہیں۔ ان کے نقطۂ تماس کا جوڑ م ق اکثر ان ٹینجنٹوں کا کارڈ تماس کہلاتا ہے۔

۹۔ دائرے کے کوئی سے دو ٹینجنٹ اپنے کارڈ تماس کے ساتھ برابر زاویئے پیدا کرتے ہیں۔

۱۰۔ اگر دو دائرے باہم مس کریں۔ تو نقطۂ تماس پر ایک مشترک

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ٹینجنٹ کھینچا جا سکتا ہے۔

اس کا عکس بھی ثابت کرو۔

۱۱۔ دو دائروں کے نقطۂ تماس پر سے جو اندر یا باہر سے مس کرتے ہیں۔ ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے۔ جو محیط کو پھر م اور ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو۔ کہ م اور ق پر کے ٹینجنٹ متوازی ہیں۔

اس کا عکس بھی ثابت کرو۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۸ - مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم دائرے کو مس کرے - تو جو خط مستقیم مرکز سے نقطۂ تماس تک کھینچا جائے - وہ ٹینجنٹ پر عمود ہوگا -

فرض کرو - خط مستقیم د ی ⊙ ا ب ج کو نقطہ ج پر مس کرتا ہے -

اور فرض کرو - کہ نصف قطر ف ج کھینچا گیا ہے -

تو ف ج ⊥ ہوگا د ی پر

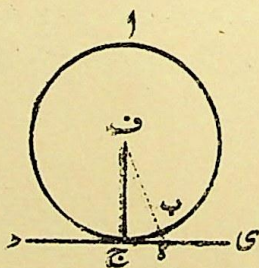
اگر نہیں - تو ف ہ ⊥ کھینچو د ی پر جو محیط کو ب پر کاٹے -

تو ف ہ ج قائمہ ہے -

∴ ف ج ہ < قائمہ

∴ ف ہ ج > ف ج ہ

∴ ف ج > ف ہ

∴ ف ب > ف ہ

اور یہ ناممکن ہے -

اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے - کہ ف پر سے گزرنے والا ف ج کے سوا اور کوئی خط د ی پر ⊥ نہیں ہو سکتا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دیگر ثبوت

کیونکہ ج پر سے ⊙ اب ج پر صرف ایک ہی ٹینجنٹ کھینچا جا سکتا ہے - یعنی ج ف ج پر ⊥ ہے - [ک ۳ ش ۱۶ ح ۳
∴ ٹینجنٹ د ی یہی ⊥ ہے -
پس ف ج ⊥ ہے د ی پر ٭

مثالیں

۱- ایک دیئے ہوئے دائرے پر ٹینجنٹ کھینچو (۱) ایک خط مستقیم کے متوازی - (۲) اس پر عمود ٭

۲- دائرے میں ایک دیئے ہوئے طول کا کارڈ کھینچو جو (۱) ایک خط مستقیم کا متوازی ہو - (۲) اس پر عمود ہو ٭

۳- دائرے کا ایک دیئے ہوئے طول کا کارڈ کھینچو - جو ایک دیئے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ ایک دیا ہؤا زاویہ بناوے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۱۹ - مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم دائرے کو مس کرے - اور نقطۂ تماس سے ایک خط مستقیم ٹینجنٹ پر قائمے زاویئے بناتا ہوا کھینچا جائے - تو دائرے کا مرکز اسی خط میں ہوگا -

فرض کرو دی ⊙ اب ج کو ج پر مس کرتا ہے -

اور فرض کرو - کہ ج ا ⊥ کھینچا گیا ہے دی پر

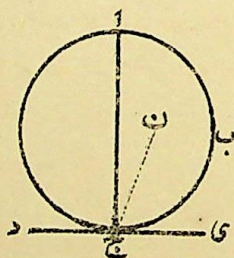
تو ⊙ کا مرکز ج ا میں ہوگا -

اگر نہیں تو فرض کرو ج ا کے باہر ن مرکز ہے -

ن ج کو ملاؤ -

تو ن ج ی قائمہ ہے -

لیکن ا ج ی قائمہ ہے -

∴ ن ج ی = ا ج ی

اور یہ باطل ہے -

∴ ن ج ا کے باہر نہیں ہو سکتا -

یعنی ج ا مرکز پر سے گزرنا چاہئے ‌٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دیگر ثبوت

یہ ثابت ہو چکا ہے۔ کہ اگر مرکز ف ج سے ملا دیا جائے۔ تو

ف ج ⊥ ہے دی پر

∴ ف ج ج ا کے اوپر پڑنا چاہئے۔

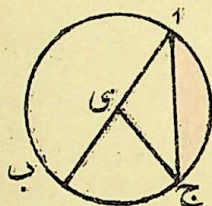
∴ ج ا مرکز پر سے گزرنا چاہئے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۰ - مسئلہ

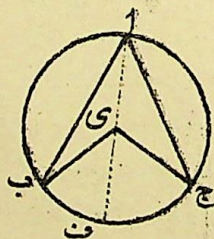
ایک ہی قوس پر دائرے کے مرکز پر کا زاویہ اُس کے محیط پر کے زاویئے سے دوچند ہوتا ہے۔

فرض کرو ا ب ج ایک ⊙ ہے

ب ی ج ایک ∠ ہے اُس کے مرکز پر
اور ب ا ج ہے ∠ محیط پر
جو دونو ایک ہی قوس ب ج پر
کھڑے ہیں۔

تو ∠ ب ی ج دوچند ہے ∠ ب ا ج سے

(۱) فرض کرو ∠ ب ا ج کو گھیرنے والے ضلعوں میں سے
ایک (ب ا) قطر ہے۔
نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ج

∴ ∠ ی ا ج = ∠ ی ج ا

∴ ∠ ی ا ج ∠ ی ج ا ملکر دوچند
ہیں ∠ ی ا ج سے

∴ بیرونی ∠ ب ی ج بھی دوچند ہے ∠ ی ا ج سے

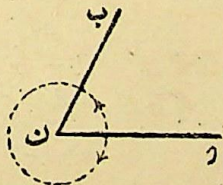
(۲) فرض کرو - ضلعوں ب ا ا ج میں سے کوئی بھی قطر نہیں۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا ی کو ملاؤ۔
اور اس کو بڑھاؤ۔کہ محیط کو ف
پر کاٹے۔
تو (ا) سے ف ی ج دو چند
ہے ف ا ج سے
اور ف ی ب دوچند ہے
ف ا ب سے
∴ کل (یا باقی) (دوسری فگر میں) ب ی ج دو چند ہے کل (یا باقی)
ب ا ج سے∻

نوٹ

ا۔ک ایس زاوئے کی تعریف کی تشریح میں لکھا گیا ہے۔کہ ن ا کے مقام سے خط ن ب جس قدر گھومتا ہے۔ا ب کا درمیانی زاویہ اتنا ہی ہوتا ہے۔لیکن واضح ہو کہ ن ا کے مقام سے خط ن ا ن ب کے مقام تک دو طرح آ سکتا ہے۔ یا دائیں کو گھوم کر یا بائیں کو۔
اس طرح نقطہ ن کے گرد جو دو زاوئے بنتے ہیں۔ان کو ایک دوسرے کا کانجوگیٹ (Conjugate) کہتے ہیں۔بڑے کو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کلاں کانجوگیٹ - چھوٹے کو خُرد کانجوگیٹ - اور دونو کانجوگیٹ ملکر چار قائموں کے برابر ہوتے ہیں -
جب خط ن ب گھوم کر ان کی سیدھ میں پہنچ جاتا ہے - تو ا ن ب دو قائموں کے برابر ہوتا ہے - پس اس حالت میں کلاں اور خُرد کانجوگیٹ دونو برابر ہونگے -
کلاں کانجوگیٹ زاوئے کو بعض دفعہ ری انٹرنٹ (Re-entrent.) زاویہ بھی کہتے ہیں - اقلیدس میں اس کا ذکر بہت کم آتا ہے *
۲- واضح ہو - کہ ک ۳ ش ۲۰ مرکز پر کے خرد وکلاں دونو طرح کے کانجوگیٹ زاویوں کے بارے میں درست ہے - یعنی اگر ب ی ج کلاں کانجوگیٹ دو قائموں سے بڑا ہو - تو بھی بہ ب ا ج سے دو چند ہوگا *

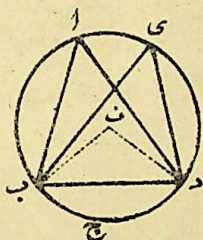
مثال

⊙ ا ب ج د کے دو کارڈ ا ی ب ج ی د نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں - ثابت کرو - کہ جو زاوئے مرکز پر ا ج ب د قوسوں کے مقابل ہیں - وُہ دونو ملکر ا ی ج سے دو چند ہیں -
اگر کارڈ ج ا ب د بڑھائے جائیں - کہ ف پر ملیں - تو بتاؤ - قوس ا د اور ب ج کے مقابل کے زاویوں اور ب ف ا ج میں کیا نسبت ہوگی *

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۱۔ مسئلہ

جو زاوئے دائرے کے ایک ہی قطعے میں واقع ہوں۔ باہم برابر ہوتے ہیں۔

فرض کرو ا ب ج د ایک ⊙ ہے۔ اور ب ا د اور ب ی د زاوئے ایک ہی قطعہ ب ا ی د میں ہیں۔

تو ب ا د = ب ی د

⊙ کا مرکز ف لو۔

(۱) فرض کرو۔ کہ ف قطعہ ب ا ی د کے اندر واقع ہوتا ہے۔ اور ب ف ف د کو ملاؤ۔

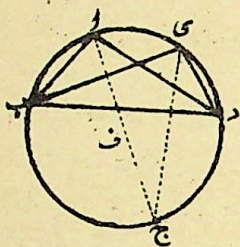
ب ا د ب ی د میں سے ہر ایک جو محیط پر ہے۔ ب ف د کا جو مرکز پر ہے۔ نصف ہے (∵ دونو ایک ہی قوس ب ج د پر کھڑے ہیں [ک ۳ ش ۲۰

∴ ب ا د = ب ی د

(۲) فرض کرو ف قطعہ ب ا ی د کے اندر نہیں واقع ہوتا ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا ف کو ملاؤ۔ اور اسے بڑھاؤ۔
کہ محیط کو ج پر کاٹے۔
تو ف قطعہ ب ا د ج کے
اندر واقع ہوتا ہے۔

∴ (۱) سے ب ا ج = ب ی ج

اسی طرح ج ا د = ج ی د

∴ کل ب ا د = کل ب ی د

نوٹ

۱۔ اگر کلاں کا بجوگبٹ زاویوں کا استعمال مان لیا جائے۔ تو ک ۳ ش ۲۱ (۱) کا ثبوت ہر صورت میں صادق آ سکتا ہے۔ کیونکہ ب ف د کی مقدار چاہے کسی قدر ہو۔ وہ ب ی د سے دو چند ہوگا۔ طالب علم کو چاہیئے۔ ہر صورت کی شکل بنا کر اپنی تشفی کر لے۔

۲۔ اس شکل کا عکس بھی صحیح ہے۔ یعنی

اگر ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے ایک ہی طرف کئی نقطوں پر اُسی خط کے مقابل کے زاوئے برابر ہوں۔ تو وہ نقطے ایک دائرے پر واقع ہونگے۔ جس کا کارڈ وہ دیا ہُوا خط ہے۔

یا یوں کہو۔ کہ

اگر کسی دئے ہوئے خط کے کسی ایک ہی طرف کسی نقطے پر اُس کے مقابل کا زاویہ ایک ہی رہے۔ تو اس نقطے کا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

توکس ایک دائرہ ہوگا۔ جس کا کارڈ خط مذکور ہے۔
اثبات خلفی کے طریق سے اس کا ثبوت بآسانی معلوم ہو جائیگا +

مثالیں

۱- اگر کسی قطعۂ دائرہ کے قاعدے کے ایک ہی طرف قطعے کے اندر اور باہر نقطے واقع ہوں۔ تو اندرونی نقطے پر کا اس قاعدے کے مقابل کا زاویہ بیرونی نقطے پر کے اس کے مقابل کے زاوئے سے بڑا ہوگا +

۲- اب ج د کسی دائرے کے متوازی کارڈ ہیں۔ م اس کا مرکز ہے۔ ا ج اور ب د دائرے کے اندر ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ

(۱) ا ی م د ہم دائرہ ہیں۔ یعنی ان پر سے گزرتا ہؤا ایک دائرہ بن سکتا ہے +

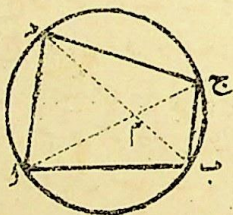
(۲) ا ی د = ۲ ا ب د = ا م د

(۳) ب ی م ج ہم دائرہ ہیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۲ - مسئلہ

اگر دائرے کے اندر کوئی چوکور شکل بنائی جائے - تو اس کے کوئی دو مقابل کے زاویے ملکر دو قائموں کے برابر ہونگے -

فرض کرو ا ب ج د چوکور ⊙ ا ب ج د کے اندر بنائی گئی ہے -

اس کے کوئی دو مقابل کے زاویے ملکر دو قائموں کے برابر ہونگے -

ا ج ب د کو ملاؤ

ادب = اجب (ایک ہی قطعہ ا د ج ب میں)
اور ب د ج = ب ا ج (ایک ہی قطعہ ب ا د ج میں) [ک ۳ ش ۲۱]

∴ کل ا د ج = ا ج ب ب ا ج

∴ دو ا د ج ا ب ج ملکر = تین ا ج ب ب ا ج ا ب ج
= دو قائموں

اسی طرح دو ب ا د ب ج د = دو قائموں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دیگر ثبوت

⊙ ا ب ج د کا مرکز م معلوم کرو۔
اور ا م م ج کو ملاؤ۔

ادج محیط پر = ½ ام ج مرکز پر (ایک ہی قوس ا ب ا ج پر) [ک ۲ ش ۲۰

اور ا ب ا ج محیط پر = ½ ا م ج مرکز پر (ایک ہی قوس
ا د ج پر) [ک ۳ ش ۲۰

∴ ا د ج ا ب ج = ½ کانجوگیٹ زاویوں مرکز پر
= دو قائموں

نوٹ

ک ۲ ش ۲۲ کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی
اگر کسی چوکور کے دو مقابل کے زاویئے ملکر دو قائموں کے برابر ہوں۔ تو اس چوکور کے گرد دائرہ بنایا جا سکتا ہے ∴
تع۔ جو فگر دائرے کے اندر بن سکتی ہے۔ اسے سائی کلک (Cyclic) فگر کہتے ہیں۔
پس مذکورۂ بالا چوکور سائی کلک چوکور ہے ∴

مثالیں

۱۔ اگر ایک سائی کلک چوکور ا ب ج د کا ضلع ب ج ی تک بڑھایا جائے۔ تو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

بیرونی ی ج د = مقابل کے اندرونی ب ا د

(کیونکہ ان میں ایک ب ج د کا سپلیمنٹ ہے)
اس کا عکس بھی درست ہے - یعنی
اگر چوکور ا ب ج د کا بیرونی ی ج د جو ضلع ب ج کو بڑھانے سے بنتا ہے - مقابل کے اندرونی ب ا د کے برابر ہو - تو چوکور سائی کلک ہے *

۲- دو باہم کاٹنے والے دائروں کے دو نقاط تقاطع پر سے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں - جو محیطوں پر جا کر ختم ہوتے ہیں - ثابت کرو - کہ یہ خطوط برابر ہیں *

۳- ا ب ج د ایک سائی کلک چوکور ہے - اور ا د اور ب ج بڑھانے سے ی پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ △ ی ج د اور ی ا ب اکوی اینگیولر ہیں *

۴- ایک دی ہوئی تکون کے ایک اندرونی یا بیرونی نقطے سے ایسا خط مستقیم کھینچو - جو تکون میں سے ایک سائی کلک چوکور کاٹ لے - بتاؤ - اس سوال کا حل کیسے طرح ہو سکتا ہے *

۵- ا ب ج ایک تکون ہے - اور ا اور ب پر سے گزرتے ہوئے دائرے کھینچے گئے ہیں - تو کل دائروں کے نقاط تقاطع کے جوڑ آپس میں متوازی ہونگے *

۶- ا ب ج د ایک سائی کلک چوکور ہے - ا د - ب ج بڑھانے سے ی پر ملتے ہیں - اور ایک دائرہ جو ج اور د پر سے گزرتا ہوا بنایا گیا ہے - دی ج ی کو بڑھانے سے ف اور غ پر ملتا ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ثابت کرو - کہ ف غ || ہے اب کا -

۷- ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے - ا ب پر سے گزرتا ہُوا ایک دائرہ ا د اور ب ج کو ی اور ف پر کاٹتا ہے - ثابت کرو - کہ ج د ی ف سے گزرتا ہُوا ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے ÷

۸- ایک سائی کلک چوکور کے ضلعے ا ب ج د متوازی ہیں - ی قوس ج د کا نقطۂ تنصیف ہے - ثابت کرو - کہ ی ج اس زاویے کی تنصیف کرتا ہے - جو ا ج اور ب ج کو بڑھانے سے بنتا ہے - (دیکھو مثال ۱) ÷

۹- اگر کسی سائی کلک چوکور کے دو ضلعے متوازی ہوں - تو باقی دو ضلعے ان ضلعوں کے ساتھ برابر زاویے بنائینگے -
اس کا عکس بھی ثابت کرو ÷

۱۰- ایک دائرے کا مرکز م ہے - اور ا ب ج د دو متوازی کارڈ ہیں ا ج ب د دونو بڑھانے سے ی پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ ی م د ایک ہی دائرے پر واقع ہیں (دیکھو مثال ۲ ش ۲)

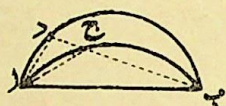
۱۱- سائی کلک متوازی الاضلاع قائم الزوایا ہوتی ہے -
برعکس اس کے
قائم الزوایا ایک سائی کلک شکل ہوتی ہے ÷

۱۲- اگر ایک ہکسیگن ا ب ج د ی ف کسی دائرے کے اندر بنائی جائے - تو ا + ج + ی = ب + د + ف (ہر حرف پر زاویے کا نشان)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۳ - مسئلہ

ایک ہی خط مستقیم پر ایک ہی طرف ایسے دو مشابہ قطعہ دائرے نہیں ہو سکتے - جو ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں -

فرض کرو ا د ب ا ج ب دو قطعہ دائرے ایک ہی خط مستقیم ا ب پر ہیں - اور ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے ہیں -

تو وہ مشابہ نہیں ہونگے -

∵ ○ ا د ب ا ج ب ا اور ب پر کاٹتے ہیں -

∴ وہ اور کسی نقطے پر نہیں کاٹتے - [ک ۳ ش ۱۰

∴ ایک قطعہ ا ج ب دوسرے قطعہ ا د ب کے اندر پڑنا چاہیئے -

خط مستقیم ب ا ج د کھینچو -

اور ا ج ا د کو ملاؤ -

مش ۱۶ ک ۱ بیرونی ا ج ب > اندرونی مقابل کے ا د ب

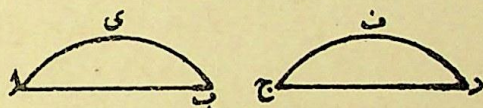
∴ قطعہ ا ج ب قطعہ ا د ب کے مشابہ نہیں ہے - حد ۱۰ ک ۳

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۴ - مسئلہ

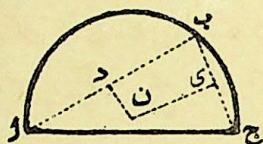
دائروں کے مشابہ قطعے جو برابر مستقیم خطوں پر واقع ہوں - برابر ہوتے ہیں -

فرض کرو ا ی ب ج ف د ⊙ کے مشابہ قطعے برابر مستقیم خطوں اب ج د پر واقع ہیں -

تو قطعہ ا ی ب = قطعہ ج ف د
کیونکہ اگر قطعہ ا ی ب قطعہ ج ف د پر اس طرح رکھا جائے۔ کہ نقطہ ا نقطہ ج پر اور خط مستقیم اب خط مستقیم ج د پر واقع ہو -
تو نقطہ ب نقطہ د پر منطبق ہوگا - (∵ اب = ج د)
∴ قطعہ ا ی ب منطبق ہونا چاہیئے قطعہ ج ف د پر [ک ۳ ش ۲۲
∴ قطعہ ا ی ب = قطعہ ج ف د

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۵- مسئلہ

اَیک قطعہ دائرہ دیا ہُوا ہے - وہ دائرہ بناؤ - جس کا یہ قطعہ ہے -

فرض کرو ا ب ج دیا ہُوا قطعہ ہے -
چاہتے ہیں - کہ وہ دائرہ بنائیں -
جس کا یہ قطعہ ہے -
قوس ا ب ج پر کوئی نقطہ ب لو -
اور ا ب ب ج کو ملاؤ -
اور ا ب ب ج کی د اور ی پر تنصیف کرو -
د اور ی سے ا ب اور ب ج پر ⊥ کھینچو -
یہ دونو عمود مرکز پر سے گزرنے چاہئیں -
∴ اگر یہ بڑھائے جائیں - تو ایک دوسرے کو کاٹینگے -
فرض کرو - وہ بڑھانے سے ن پر کاٹتے ہیں -
تو ن مرکز ہے -
∴ جو ⊙ ن کو مرکز اور ن ا ن ب یا ن ج کو نصف قطر مان کر کھینچا جائیگا ⊙ مطلوبہ ہوگا ∴

دیگر حل

کارڈ ا ج کے نقطۂ تنصیف د سے اُس پر د ب ⊥ کھینچو -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا پر ب ا ی = ا ب ک کے بناؤ - کہ ا ی د ب ا کو ی
پر ملے -
تو ی پورے دائرے کا مرکز ہوگا -
(ی ج = ی ب = ی ا) ٭

نوٹ

واضح ہو - کہ ہم ک ۳ ش ۲۵ میں مفصلۂ ذیل سوال حل کر چکے ہیں -
(۱) ایک قوس دی ہوئی ہے - پورا دائرہ بناؤ ٭
(۲) ایسے دائرے کا مرکز معلوم کرو - جس کے محیط کا صرف کوئی حصہ دیا ہوا ہے ٭

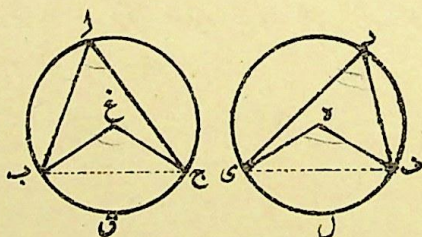
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۶ - مسئلہ

مساوی دائروں میں برابر زاویئے خواہ مرکزوں پر ہوں خواہ محیطوں پر - برابر قوسوں پر واقع ہوتے ہیں -

فرض کرو غ اور ہ دو مساوی دائروں اب ج دی ف کے مرکز ہیں -

(۱) فرض کرو ب غ ج = ی ہ ف

تو قوس ب ق ج = قوس ی ل ف

⊙ اب ج کو ⊙ دی ف پر اس طرح رکھو - کہ

غ ہ پر پڑے

اور غ ب ہ ی پر

تو قوس ب ق ج قوس ی ل ف پر پڑیگی (∵ ⊙ اب ج = ⊙ دی ف)

اور غ ج ہ ف پر پڑیگا - (∵ ب غ ج = ی ہ ف)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ج ف پر منطبق ہوگا - (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)

∴ قوس ب ق ج قوس ی ل ف پر منطبق ہوتی ہے -

∴ وہ برابر ہیں -

(۲) فرض کرو ∠ ب ا ج = ∠ ی د ف

تو ∠ ب غ ج = ∠ ی ہ ف

∴ قوس ب ق ج = قوس ی ل ف

حاصل

ایک دائرے میں برابر زاوئے خواہ مرکزوں پر ہوں - خواہ محیطوں پر - برابر قوسوں پر واقع ہوتے ہیں -

کیونکہ ⊙ ا ب ج میں فرض کرو - ایک اور ∠ ب غ ج = ∠ ب ا ج

تو ∠ ب غ ج = ∠ ی ہ ف

∴ قوس ب ج جس پر وہ واقع ہے = قوس ی ل ف [ک ۳ ش ۲۶

= قوس ب ق ج

مثالیں

۱- دائرے جن میں برابر یا سپلیمنٹری زاوئے برابر ٹکڑوں کے مقابل واقع ہوں - مساوی ہوتے ہیں ۔

۲- ایک ہی دائرے (یا برابر دائروں) میں مرکز پر کے نا برابر زاویوں میں سے جو بڑا ہوتا ہے - وہ بڑی قوس کے مقابل واقع

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہوتا ہے +

۳- اگر ایک دائرے ا ب ج د میں کارڈ ا د کارڈ ب ج کے || ہو۔ تو ثابت کرو۔ کہ قوس ا ب = قوس ج د

۴- △ ا ب ج کے اندر اور گرد دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ا اور اندرونی دائرے کے مرکز م کا جوڑ بڑھانے سے بیرونی دائرے کو ف پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو۔ کہ ف ب = ف م = ف ج

۵- دائرے میں ایک زاویہ واقع ہے۔ ثابت کرو۔ کہ

(۱) اس زاویے کی تنصیف کرنے والا خط اُس قوس کی تنصیف کرتا ہے۔ جس پر وہ زاویہ واقع ہے۔

(۲) اس زاویے کے منفصلہ زاوئے کی تنصیف کرنے والا خط اُس قوس کی تنصیف کرتا ہے۔ جس میں وہ زاویہ واقع ہے۔

(۳) پس ثابت کرو۔ کہ

قطعہ دائرے میں کے زاویوں (یا ان کے متصلہ زاویوں) کی تنصیف کرنے والے خط کانکرنٹ ہوتے ہیں +

۶- ایک مربع کے دو متصلہ ضلعے دو معین نقطوں پر سے گزرتے ہیں۔ تو ثابت کرو۔ کہ اس کے وتر ایک اَور معین نقطے پر سے گزرینگے۔ (مثال ۵ اور ک ۳ ش ۲۱ کے عکس سے کام لو)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۷ - مسئلہ

مساوی دائروں میں جو زاوئے برابر قوسوں پر واقع ہوتے ہیں - خواہ وہ مرکزوں پر ہوں - خواہ محیطوں پر - باہم برابر ہوتے ہیں

فرض کرو غ ہ دو مساوی ⊙ ا ب ج د ی ف کے مرکز ہیں -
اور فرض کرو - قوس ب ق ج = قوس ی ل ف

تو ب غ ج = ی ہ ف

اور ب ا ج = ی د ف

⊙ ا ب ج کو ⊙ ی د ف
پر اس طرح رکھو - کہ
غ ہ پر واقع ہو - اور
غ ب ہ ی پر
تو ب ی پر پڑیگا -

اور قوس ب ق ج قوس ی ل ف پر (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)
∴ ج ف پر منطبق ہوگا - (∵ قوس ب ق ج = قوس ی ل ف)
∴ غ ج منطبق ہ ف پر ہوگا - [اصل ۱۰

∴ ب غ ج = ی ہ ف

∴ ب ا ج بھی = ی د ف [ک ۳ ش ۲۰

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

حاصل

ایک ہی دائرے میں جو زاویے برابر قوسوں پر واقع ہوتے ہیں۔خواہ وہ مرکزوں پر ہوں - خواہ محیطوں پر - باہم برابر ہوتے ہیں ٭

نوٹ

ک ۳ ش ۲۷ ش ۲۶ کا عکس ہے - اور دیگر عکسوں کی طرح اثبات خلفی سے ثابت ہو سکتی ہے ٭

مثالیں

۱- اگر ⊙ اب ج د میں قوس اب قوس ج د کے برابر ہو- تو ثابت کرو کہ

کارڈ اد = کارڈ ب ج

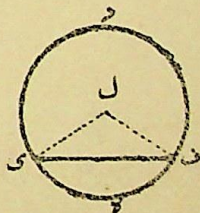
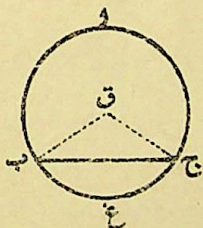
۲- ایک دائرے میں محیط پر ایک زاویہ واقع ہے - جس قوس پر یہ زاویہ واقع ہے - اُس کے نقطۂ تنصیف اور زاویۂ مذکور کا جوڑ اس زاویے کی تنصیف کریگا ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۲۸ - مسئلہ

مساوی دائروں میں برابر کارڈوں سے جو قوسیں کٹتی ہیں - وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں - بڑی بڑی کے اور چھوٹی چھوٹی کے -

فرض کرو ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف
اور کارڈ ب ج = کارڈ ی ف
تو بڑی قوس ب ا ج = بڑی قوس ی د ف
اور چھوٹی قوس ب غ ج = چھوٹی قوس ی ہ ف

⊙ ا ب ج د ی ف کے مرکز ق اور ل معلوم کرو -
ب ق ق ج ی ل ل ف کو ملاؤ -
⊙ ا ب ج کو ⊙ د ی ف پر اس طرح رکھو - کہ
ب ی پر پڑے
اور ب ج ی ف پر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ج ف پر منطبق ہوگا۔ (∵ ب ج = ی ف)

اور ق ل پر منطبق ہوگا۔ [ک ۱ ش ۷

∴ قوس ب غ ج قوس ی ہ ف پر منطبق ہوگی (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)

اور قوس ب ا ج قوس ی ف د پر منطبق ہوگی (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)

∴ قوس ب غ ج = قوس ی ہ ف

اور قوس ب ا ج = قوس ی د ف

دیگر ثبوت

△ ب ق ج ی ل ف میں

ب ف ق ج = ی ل ل ف (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)

اور ب ج = ی ف

∴ ب ق ج = ی ل ف

∴ قوس ب غ ج = قوس ی ہ ف [ک ۳ ش ۲۶

∴ باقی قوس ب ا ج = باقی قوس ی د ف (∵ ⊙ ا ب ج = ⊙ د ی ف)

حاصل

ایک ہی دائرے میں برابر کارڈ برابر قوس کاٹتے ہیں ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

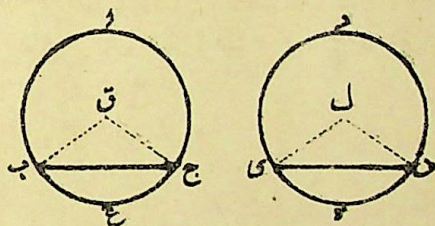
شکل ۲۹ - مسئلہ

مساوی دائروں میں برابر قوسوں کے مقابل

برابر کارڈ ہوتے ہیں +

فرض کرو ⊙ اب ج = ⊙ دی ف

اور فرض کرو - قوس ب غ ج = قوس ی ہ ف

تو کارڈ ب ج = کارڈ ی ف

⊙ اب ج دی ف کے مرکز ق اور ل معلوم کرو -

اور ب ق ق ج ی ل ل ف کو ملاؤ -

⊙ اب ج کو ⊙ ی د ف پر اس طرح رکھو - کہ

ق ل پر پڑے

اور ق ب ل ی پر

تو ب ی پر پڑیگا -

اور قوس ب ق ج قوس ی ل ف پر پڑیگی (∵ ⊙ اب ج = ⊙ دی ف)

اور ج ف پر پڑیگا - (∵ قوس ب غ ج = قوس ی ہ ف)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ب ج ی ف پر منطبق ہوگا۔ [اصل ١٠

∴ ب ج = ی ف

حاصل

ایک ہی دائرے میں برابر قوسوں کے مقابل برابر کارڈ ہوتے ہیں ؞

مثالیں

١- ایک ہی دائرے (یا مساوی دائروں) میں برابر کارڈوں کے مقابل کے زاویے (خواہ مرکزوں پر ہوں یا محیطوں پر) برابر ہوتے ہیں ؞

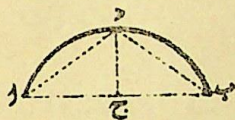
٢- ⊙ ا ب ج د میں کارڈ ا ب = کارڈ ج د۔ تو ثابت کرو۔ کہ ا د متوازی ہوگا ب ج کا۔

اس کا عکس بھی ثابت کرو ؞

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۰ - سوال

ایک دی ہوئی قوس کی تنصیف کرو۔

فرض کرو ادب دی ہوئی قوس ہے
چاہتے ہیں۔ کہ اس کی تنصیف کریں۔
اب کو ملاؤ - اور اس کی ج پر
تنصیف کرو۔

ج سے ج د اب پر ⊥ کھینچو۔ جو قوس کو د پر کاٹے۔
تو قوس ادب کی د پر تنصیف ہو گئی۔
اد ب د کو ملاؤ۔
△ اج د ب ج د میں
اج ج د = ب ج ج د
اور قائمہ اج د = قائمہ ب ج د

∴ اد = د ب
اور اد ب د قوسوں میں سے ہر ایک نصف دائرے سے چھوٹی
ہے (∵ ج د یا ج د بڑھایا ہوا مرکز پر سے گزرتا ہے)
∴ قوس اد = قوس د ب

دیگر عمل

⊙ کی باقی قوس کھینچو۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور اس پر کوئی نقطہ ی لو۔

ای ی ب کو ملاؤ

اور ای ب کی خط مستقیم ی د سے تنصیف کرو۔

تو دی ہوئی قوس کی تنصیف د پر ہوگئی۔

∵ ای د = ب ی د ایک ہی دائرے ہیں

∴ قوس اد = قوس ب د [ک ۳ ش ۲۶

نوٹ

مفصلۂ ذیل طریقوں سے بھی شکل کا عمل ہو سکتا ہے۔

(۱) دی ہوئی قوس کے مقابل مرکز پر کے زاوئے کی تنصیف کرو +

(۲) دی ہوئی قوس میں کوئی نقطہ ی لو۔ اِی ب کے متصلہ بیرونی زاوئے کی تنصیف کرو۔

(دیکھو ک ۳ ش ۲۶ مثال ۵)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۱ - مسئلہ

دائرے میں جو زاویہ نصف دائرے میں واقع ہو
وہ قائمہ ہوتا ہے - اور جو نصف دائرے سے بڑے
قطعے میں ہو - وہ قائمے سے چھوٹا ہوتا ہے - اور
جو نصف دائرے سے چھوٹے قطعے میں ہو - وہ
قائمے سے بڑا ہوتا ہے -

فرض کرو ا ب ج د ایک ⊙ ہے - جس کا ب ج قطر ہے - اور
ی مرکز ہے -

اور فرض کرو - کارڈ ج ا ⊙ کو ا ب ج کلاں قطعہ ا د ج خرد
قطعے میں تقسیم کرتا ہوا کھینچا گیا ہے

تو (۱) نصف دائرے ب ا د ج میں ب ا ج قائمہ ہے -

(۲) کلاں قطعہ ا ب ج میں

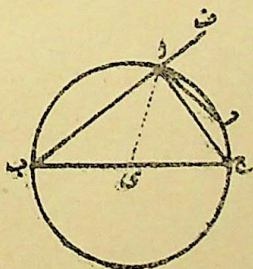
ا ب ج < قائمہ

(۳) خرد قطعہ ا د ج میں

ا د ج > قائمہ

ی ا کو ملاؤ - اور ب ا کو
ف تک بڑھاؤ -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۱) نصف قطر ی ا = نصف قطر ی ب

∴ ی ا ب = ی ب ا

اسی طرح ی ا ج = ی ج ا

∴ کل ب ا ج = ی ب ا ی ج ا

= بیرونی ج ا ف [ک ۱ ش ۳۲

∴ ب ا ج ج ا ف میں سے ہر ایک قائمہ ہے ÷

(۲) اندرونی ا ب ج < بیرونی مقابل کے ج ا ف

∴ ا ب ج < قائمہ [ک ۱ ش ۱۷

(۳) دو ا د ج ا ب ج = دو قائمے [ک ۳ ش ۲۲

لیکن ا ب ج < قائمہ [ک ۱ ش ۱۷

∴ ا د ج > قائمہ ÷

دیگر ثبوت

(۱) ب ا ج محیط پر = $\frac{1}{2}$ ب ی ج مرکز پر

∴ ب ا ج = قائمہ ÷

(۲) ا ب ج محیط پر = $\frac{1}{2}$ خُرد کانجوگیٹ ا ی ج مرکز پر۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ زاویہ اب ج > قائمہ ∴

(۳) زاویہ ادج محیط پر = ½ کلاں کانجوگیٹ زاویہ ای ج مرکز پر

∴ زاویہ ادج > قائمہ ∴

حاصل

جب کسی قطعہ دائرہ میں کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔ تو وہ نصف دائرہ ہوتا ہے۔ اور جب قائمے سے چھوٹا ہوتا ہے۔ تو قطعہ دائرہ نصف دائرے سے بڑا ہوتا ہے۔ اور جب قائمے سے بڑا ہوتا ہے۔ تو قطعہ نصف دائرے سے چھوٹا ہوتا ہے ∴

مثالیں

۱۔ ایک تکون کے ضلعوں کو قطر مان تکون کے گرد دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ اِن کے تمام نقاط تقاطع تکون کے ضلعوں پر واقع ہونگے +

۲۔ دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک پر کو قطر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ قطروں کے دوسرے سرے اور دوسرا نقطۂ تقاطع ہم خط ہیں۔ یعنی ایک ہی خط میں واقع ہیں ∴

۳۔ اگر کسی قائم الزاویہ تکون کی ایک ساق پر نصف دائرہ بنایا جائے۔ تو اُن نقاط تقاطع پر کا ٹینجنٹ جہاں نصف دائرہ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تکون کے وتر کو کاٹتا ہے۔ دوسری ساق کی تنصیف کریگا +

۴۔ ا ب ج د ایک خط مستقیم ہے۔ ا ب اور ج د کو قطر مان کر ان پر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اور اِن دائروں کا ایک مشترک ٹینجنٹ کھینچا گیا ہے۔ جو نقاط ی اور ف پر ان کو مس کرتا ہے۔ تو ثابت کرو۔ کہ △ ا ی ب اور ج ف د اکوی اینگیولر ہیں۔ (نقاط ی اور ف کو مرکز سے ملاؤ)

۵۔ اگر دائرے میں بہت سے کارڈ ایک ہی نقطے پر سے گزریں۔ تو کارڈوں کے تمام نقاط تنصیف ایک اور دائرے پر واقع ہونگے +
(کسی نقطۂ تنصیف کو دئے ہوئے دائرے کے مرکز سے ملاؤ۔ اور ک ۳ ش ۳ سے کام لو) +

۶۔ ایک دئے ہوئے نقطے پر سے ایک دئے ہوئے دائرے کا کارڈ کھینچو۔ جس کی ایک دئے ہوئے خط مستقیم سے تنصیف ہو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۲ - مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم دائرے کو مس کرے اور نقطۂ تماس سے کوئی کارڈ کھینچا جائے - تو جو زاویئے یہ کارڈ ٹینجنٹ سے پیدا کریگا - وہ متبادلہ قطعوں میں کے زاویوں کے برابر ہونگے -

فرض کرو ا ب ج د ⊙ ہے - ی ب ف ب پر ٹینجنٹ ہے - اور ب د کوئی کارڈ ب پر کھینچا گیا ہے -

ب ج ج د د ا اب کو ملاؤ -

تو (۱) ف ب د = ب ا د

تو (۲) ی ب د = ب ج د

ب سے ب ا ی ف پر زاویۂ قائمہ بناتا ہوا کھینچو - تو ب ا مرکز پر سے گزرتا ہے - ا د کو ف تک بڑھاؤ -

∵ ا د ب نصف ⊙ ہے -

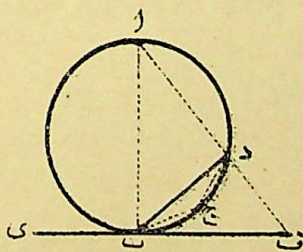
∴ ا د ب قائمہ ہے -

∴ ب د ف قائمہ ہے -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ ب د ن = ا ب ن

لیکن ب ن د دو △ ب د ن ا ب ن میں مشترک ہے۔

∴ تیسرا ن ب د = تیسرے ب ا د [ک ۱ ش ۳۲

(۲) پھر ن ب د ی ا ب د = دو قائمے

= ب ا د ب ج د [ک ۳ ش ۲۲

اور ن ب د = ب ا د

∴ ی ا ب د = ب ج د

نوٹ

ک ۳ ش ۳۲ کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی
اگر دائرے کے کسی کارڈ کے ایک سرے سے ایک خط مستقیم اس طرح کھینچا جائے۔کہ جو زاوئے یہ خط کارڈ کے ساتھ بناتا ہے۔ وہ متبادلہ قطعہ دائروں میں کے زاویوں کے برابر ہوں۔ تو یہ خطِ مستقیم دائرے پر ٹینجنٹ ہوگا۔
اس کا ثبوت طریقۂ اثبات خلفی سے ہو سکتا ہے ؛

مثالیں

۱-ا ب ج ایک تکون ہے۔ د اور ی ا ب ا ج پر ایسے نقطے لئے گئے ہیں۔کہ دی || ہے ب ج کا۔ تو ثابت کرو۔کہ △ ا ب ج ا د ی کے گرد۔جو دائرے بنائے جائینگے۔ان کا مشترک ٹینجنٹ ا پر ہوگا ؛

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲- ا ب ج د ایک سائی کلک چوکور ہے۔ ا د ب ج بڑھانے سے ی پر ملتے ہیں۔ تو ثابت کرو۔ کہ △ ج د ی کے گرد کے دائرے کا ی پر کا ٹینجنٹ ا ب کا متوازی ہوگا ÷

۳- دو دائرے (اندر یا باہر کی طرف) باہم مس کرتے ہیں ثابت کرو۔ کہ

(۱) اگر نقطۂ تماس پر سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے۔ تو وہ متشابہ قطعہ دائرے کاٹیگا ÷

(۲) اگر نقطۂ تماس پر سے کوئی ایسا خط مستقیم کھینچا جائے۔ کہ پھر دائروں کو کاٹے۔ تو دوسرے نقاط تقاطع پر کے ٹینجنٹ متوازی ہونگے ÷

(۳) اگر نقطۂ تماس پر سے کوئی ایسے دو خطوط مستقیم کھینچے جائیں۔ کہ دائروں کو پھر کاٹیں۔ تو دوسرے نقاط تقاطع کے جوڑ متوازی ہونگے ÷

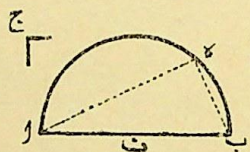
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۳ - سوال

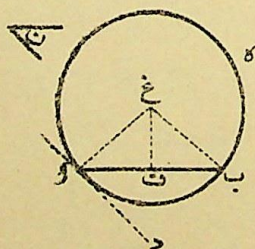
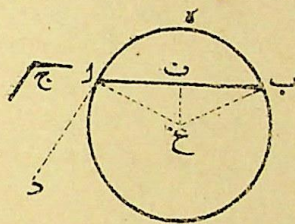
ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر ایسا قطعہ دائرہ بناؤ۔ جس میں کا زاویہ دئے ہوئے زاویۂ مستقیمۃ الخطین کے برابر ہو۔

فرض کرو اب دیا ہوا خطِ مستقیم ہے۔
اور ج دیا ہوا زاویۂ مستقیمۃ الخطین۔

ج ه ا ف ب

چاہتے ہیں۔کہ اب پر ایک ایسا قطعہ بنائیں۔ جس میں کا زاویہ $\hat{ج}$ کے برابر ہو۔
اب کی ف پر تنصیف کرو۔
(۱) اگر ج زاویہ قائمہ ہو۔
خط اب پر نصف ⊙ اهب بناؤ۔
تو $\widehat{اهب}$ قائمہ ہے۔
∴ $\widehat{اهب} = \hat{ج}$
(۲) اگر ج زاویہ قائمہ نہ ہو۔

ج ه غ و ف ب د

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ا پر ب ا د برابر ج کے بناؤ - اور ا غ ⊥ ا د پر کھینچو -
ف پر سے ف غ ⊥ ا ب پر کھینچو - اور غ ب کو ملاؤ -

△ ا ف غ ب ف غ میں
ا ف ف غ = ب ف ف غ
اور قائمہ ا ف غ = قائمہ ب ف غ

∴ ا غ = ب غ
∴ ⊙ ا ہ ب جو غ کو مرکز اور غ ا کو نصف قطر مان کر کھینچا
جائیگا - وہ ب پر سے گزریگا -

نیز ∵ غ ا د قائمہ ہے -

∴ ا د ا پر ٹینجنٹ ہے -

ب ا د = قطعہ ا ہ ب میں کے زاویہ
∴ قطعہ ا ہ ب میں کا زاویہ = دئے ہوئے زاویے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مثالیں

۱- ایک ایسا دائرہ بناؤ- کہ ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو ایک دئے ہوئے نقطے پر مس کرے- اور ایک دوسرے دئے ہوئے نقطے پر سے گزرے-

(ک ۳ ش ۳۴ کے ثبوت میں بھی اس کا عمل آ گیا ہے)

۲- △ ا ب ج کے اندر ن ایک ایسا نقطہ معلوم کرو- کہ

ن ا ب∠ = ن ب ج∠ = ن ج ا∠

عمل

ایک ⊙ بناؤ- کہ ج پر سے گزرے اور ا ب کو ا پر مس کرے-
ا د کارڈ ب ج کا || کھینچو-
ب د کو ملاؤ- کہ وہ دائرے کو ن پر کاٹے-
تو ن نقطہ مطلوبہ ہوگا +

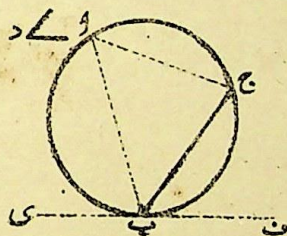
تع- اگر اسی طرح کے عمل سے مثلث کے اندر دوسرا نقطہ م معلوم کیا جائے- کہ م ب ا∠ = م ج ب∠ = م ا ج∠ - تو نقاط ن اور م △ ا ب ج کے نقاط بروکارڈ (Brocard Points) کہلاتے ہیں +

۳- دو دائرے اندر کی طرف مس کرتے ہیں- اور اندرونی دائرے کو مس کرتا ہوا دوسرے دائرے کا کوئی کارڈ کھینچا گیا ہے - تو دائروں کے نقاط تماس پر اس کارڈ کے دو حصوں کے مقابلی کے زاویے برابر ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۴ - سوال

دئے ہوئے دائرے میں سے ایسا قطعہ کاٹو۔ جس میں کا زاویہ دئے ہوئے زاویۂ مستقیمۃ الخطین کے برابر ہو۔

فرض کرو اب ج دیا ہوا ⊙ ہے۔ اور د دیا ہوا زاویہ مستقیمۃ الخطین۔ چاہتے ہیں۔کہ ⊙ اب ج میں سے ایسا قطعہ کاٹیں۔ کہ اس میں کا زاویہ $\hat{د}$ کے برابر ہو۔

ٹینجنٹ ی ب ف کھینچو۔ اور ب پر $\widehat{ف ب ج}$ برابر $\hat{د}$ کے بناؤ۔

تو قطعہ ب و ج میں کا زاویہ = $\widehat{ف ب ج}$ [ک ۳ ش ۳۲

= $\hat{د}$

مثالیں

۱۔ک ۳ ش ۲۴ کو ٹینجنٹ کھینچے بغیر ثابت کرو +

۲۔ایک دئے ہوئے دائرے کے کارڈ کو بڑھایا گیا ہے - اس بڑھے ہوئے تمام خط پر کم سے کم عمل سے دئے ہوئے دائرے کے مشابہ قطعہ دائرہ بناؤ +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

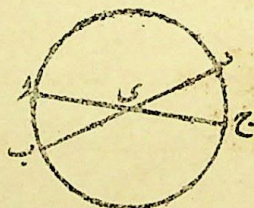
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۵ - مسئلہ

اگر دائرے کے اندر دو کارڈ ایک دوسرے کو کاٹیں۔ تو ان میں سے ایک کے حصّوں کی سطح دوسرے کے حصوں کی سطح کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو ⊙ اب ج کے کارڈ اج ب د نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔

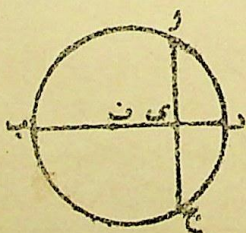
تو سطح ا ی ی ج = سطح ب ی ی د

(۱) اگر ہر ایک کارڈ مرکز ی پر سے گزرے۔

سطح ا ی ی ج = سطح ب ی ی د (∵ ا ی = ی ج = ی د = ی ب)

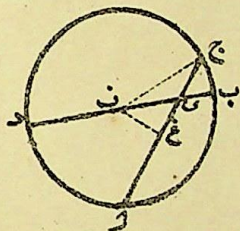
(۲) اگر ان میں سے ایک کارڈ ب د مرکز ف پر سے گزرے - اور دوسرے کارڈ اج کو جو مرکز پر سے نہیں گزرتا - قائمہ زاویوں پر کاٹے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ای = ی ج [ک ۳ ش ۳

اور سطح ب ی ی د = مربع ای پر [ثبوت ک ۲ ش ۱۴

= سطح ای ی ج (∵ ای = ی ج)

(۳) اگر کارڈ ب د مرکز ف پر سے گزرے - اور اج کو جو مرکز پر سے نہیں گزرتا - قائمے زاویوں پر نہ کاٹے -

ف غ ⊥ اج پر کھینچو - اور ف ج کو ملاؤ -

تو اغ = غ ج

اور سطح ب ی ی د مع مربع ی ف پر = مربع ف ب پر [ک ۲ ش ۵

= مربع ف ج پر (∵ ف ب = ف ج)

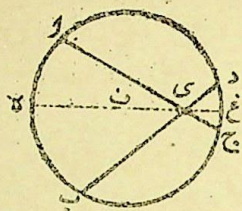
= مربعوں ف غ غ ج پر [ک ۱ ش ۴۷

= { مربعوں ف غ غ ی پر
مع سطح ای ی ج [ک ۲ ش ۵

لیکن مربع ی ف پر = مربعوں ف غ غ ی پر [ک ۱ ش ۴۷

∴ سطح ب ی ی د = سطح ای ی ج

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۴) اگر دونو میں سے کوئی کارڈ بھی مرکز ف پر سے نہ گزرے۔

ی ف کو ملاؤ۔ اور اسے بڑھاؤ۔ کہ محیط کو ہ اور غ پر کاٹے۔

تو سطح ب ی ی د = سطح غ ی ی ہ
= سطح ا ی ی ج } صورت (۱) اور (۲) سے

مثالیں

۱۔ ک ۳ ش ۳۵ کا عکس ثابت کرو۔

۲۔ ا ب ج ایک $\triangle$ ہے۔ اور ا د ب ی جو ب ج ا ج پر بترتیب $\perp$ ہیں۔ ن پر کاٹتے ہیں۔ تو ثابت کرو۔ کہ سطح ا ن ن د = سطح ب ن ن ی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

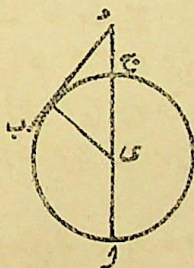
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۶ - مسئلہ

اگر ایک نقطے سے جو دائرے کے باہر ہو - دو خط مستقیم کھینچے جائیں - جن میں سے ایک تو دائرے کو کاٹے اور دوسرا اس کو مس کرے - تو کل سیکنٹ (Secant) اور اس کے اس حصے کی سطح جو دائرے کے باہر ہے - ٹینجنٹ پر کے مربع کے مساوی ہوگی -

فرض کرو - نقطہ د سے جو ⊙ ا ب ج کے باہر ہے - ٹینجنٹ د ب اور سیکنٹ د ج ا کھینچے گئے ہیں -

تو سطح اد دج = مربع د ب پر

(۱) اگر دج ا مرکز ی پر سے گزرے - ی ب کو ملاؤ -

سطح اد دج مع مربع ی ج پر = مربع ی د   [ک ۲ ش ۶

= مربعوں ی ب ب د   [ک ۱ ش ۴۷

لیکن مربع ی ج پر = مربع ی ب پر (∵ ی ج = ی ب)

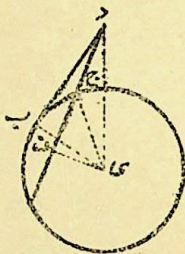
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

∴ سطح اد دج = مربّع ب د پر

(۲) اگر دج ا مرکز ی پر سے نہ گزرے۔

ب ی ی ج کو ملاؤ - اور ی ف ⊥ اج پر کھینچو۔

تو اف = ف ج [ک ۳ ش ۳

∴ سطح اد دج مع مربّع ف ج پر = مربّع ف د پر [ک ۲ ش ۶

∴ سطح اد دج مع مربّعوں ف ج ف ی پر = مربّعوں ف د ف ی پر

∴ سطح اد دج مع مربّع ی ج پر = مربّع ی د پر

= مربّعوں ی ب ب د پر [ک ۱ ش ۴۷

لیکن مربّع ی ج پر = مربّع ی ب پر (∵ ی ج = ی ب)

∴ سطح اد دج = مربّع ب د پر

حاصل ۱

اگر کسی نقطے سے جو دائرے کے باہر ہو - دو سیکنٹ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کھینچے جائیں - تو ایک کل سیکنٹ اور اس کے دائرے سے باہر کے حصے کی سطح دوسرے کل سیکنٹ اور اس کے دائرے سے باہر کے حصے کی سطح کے برابر ہوگی - (کیونکہ ان میں سے ہر ایک سطح اس نقطے پر کے ٹینجنٹ کے مربع کے مساوی ہے) ÷

حاصل ۲

اگر ایک ہی نقطے سے کسی دائرے پر دو ٹینجنٹ کھینچے جائیں - تو وہ برابر ہوتے ہیں ÷

مثالیں

۱- اگر دو دائروں کے مشترک کارڈ کو بڑھا کر اس کے کسی نقطے سے دونو دائروں پر ٹینجنٹ کھینچے جائیں - تو وہ باہم برابر ہونگے ÷ اور برعکس اس کے

اگر کسی نقطے سے دو دائروں پر کے ٹینجنٹ برابر ہوں - تو وہ نقطہ دائروں کے مشترک کارڈ پر ہوگا ÷

نوٹ - باہم کاٹنے والے دائروں کا مشترک کارڈ اُس نقطے کا لوکس ہوتا ہے - جس پر سے اُن دائروں کے ٹینجنٹ برابر ہوتے ہیں - اسلئے اس مشترک کارڈ کو دائروں کا ریڈیکل ایکسس (Radical Axis) کہتے ہیں - ریڈیکل ایکسس کی پوری تعریف اور تشریح کتاب کے اخیر کے نوٹوں میں کی گئی ہے) ÷

۲- دو باہم کاٹنے والے دائروں کا مشترک کارڈ بڑھنے پر ان کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مشترک ٹینجنٹ کی تنصیف کرتا ہے +

۳- باہم کاٹنے والے تین دائروں کے تین مشترک کانڈ ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں +

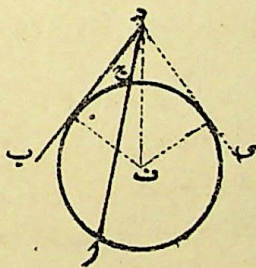
۴- ب د ج د کو ل ر تک بڑھاؤ - کہ دل = دب در = ج د
تو ثابت کرو - کہ ا ب ر ل ہم دائرہ ہیں +

۵- ا ب ج اور د ر س دو مثلثوں میں ا̂ ب̂ ج̂ بترتیب برابر ہیں د̂ ر̂ س̂ کے
تو ثابت کرو - کہ سطح ا ب رس = سطح ب ج در
(مثلثوں کو اس طرح رکھو - کہ نقطے ب اور ر ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں - اور اب اور رس ایک خط میں ہوں - تو ا ج د س ہم دائرہ ہو جائینگے) +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

شکل ۳۷ - مسئلہ

اگر کسی نقطے سے جو دائرے کے باہر ہو - دو مستقیم خط کھینچے جائیں - جن میں ایک دائرے کو کاٹے - اور دوسرا اس سے ملے - تو اگر تمام سیکنٹ اور اُس کے اُس حصے کی سطح جو دائرے کے باہر ہے - اُس خط کے مربع کے مساوی ہو - جو دائرے کو ملتا ہے - تو یہ خط جو دائرے کو ملتا ہے - اُسے مس کریگا -

فرض کرو - نقطہ د سے جو ⊙ ا ب ج کے باہر ہے - خطوط مستقیم د ب د ج ا کھینچے گئے ہیں - د ب اس سے ملتا ہے - اور د ج ا اس کو کاٹتا ہے -

اور فرض کرو - سطح ا د د ج = مربع د ب پر

تو د ب دائرے کا ٹینجنٹ ہوگا -

ٹینجنٹ د ی کھینچو -

مرکز ف معلوم کرو - اور ف ی ف ب ف د کو ملاؤ -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو مربّع دب پر = سطح اد دج   [فرض

= مربّع دی پر   [ک ۳ ش ۳۶

∴ دب = دی

△ دب ف دی ف ہیں

دب باف فد = دی یاف فد

∴ ف ب د = ف ی د

اور ف ی د قائمہ ہے -

∴ ف ب د قائمہ ہے -

∴ دب نقطہ ب پر ٹینجنٹ ہے +

مثالیں

۱- ک ۳ ش ۳۷ کو اثبات خلفی سے ثابت کرو +

۲- ج ر دو دائروں کا مشترک کارڈ ہے - ن بڑھائے ہوئے ج ر پر کوئی نقطہ ہے - م ل ان میں سے ایک دائرے کا کارڈ ہے - جو بڑھانے سے ن پر سے گزرتا ہے - ن ا دوسرے دائرے پر ٹینجنٹ ہے - ثابت کرو - کہ △ ا م ل کے گرد جو دائرہ بنایا جائیگا وہ دوسرے دائرے کو مس کریگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

متفرق مثالیں

مسئلے

۱ ایک دئے ہوئے دائرے پر کے کسی نقطہ ن سے ایک دئے ہوئے محدود خط مستقیم کے برابر اور متوازی ایک مستقیم خط ن ق کھینچا گیا ہے۔ تو ثابت کرو۔ کہ ق کا لوکس دو مساوی دائرے ہیں +

۲ م ایک معین نقطہ ہے۔ ن دئے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ ہے۔ م سے م ق کھینچا گیا ہے۔ کہ م ق = م ن اور ن م ق = کسی دئے ہوئے زاویہ۔ ثابت کرو۔ کہ ق ایسے دو دائروں میں سے ایک پر واقع ہے۔ جو دئے ہوئے دائرے کے مساوی ہیں +

(دئے ہوئے دائرے کا مرکز ج لو۔ اور م د م ج کے برابر اور ج م د دئے ہوئے زاویے کے برابر بناتا ہؤا کھینچو۔ تو د اُن دائروں میں سے ایک کا مرکز ہے۔ جن پر ق واقع ہوگا) +

۳ ایک دائرے میں دو کارڈ ایک دوسرے کے ساتھ زاویے قائمے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

بناتے ہیں - ثابت کرو - کہ ہر ایک کارڈ کے ایک سرے سے دوسرے کارڈ کا متوازی خط کھینچنے سے جو قائم الزوایا بنیگا - اُس کے کونے پہلے دائرے کے ہم مرکز دائرے پر واقع ہونگے +

۴ ا د ب ر ج س ایک دائرے کے متوازی کارڈ ہیں - ثابت کرو - کہ △ اب ج اور د ر س کانگروئنٹ ہیں -
(یہ △ کسی خاص قطر کے لحاظ سے سمیٹریکل ہیں) +

۵ دو دائرے ج د ف اور ج ی غ جن کے مرکز ا اور ب ہیں - ج پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں - د ی ج پر سے گزرتا ہے - ثابت کرو - کہ ا د || ب ی +

۶ دو دائرے ج د ف ج ی غ جن کے مرکز ا اور ب ہیں - ج پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں - ایک دائرہ ب ہ ل جو دائرہ ج د ف کا ہم مرکز ہے - ب پر سے گزرتا ہے - اگر ا ہ د پر سے گزرے - تو ثابت کرو - کہ ب ہ د ی کے برابر اور متوازی ہے +

۷ دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو اس طرح کاٹتے ہیں - کہ ہر ایک کا مرکز دوسرے کے محیط پر واقع ہوتا ہے - ثابت کرو - کہ مشترک کارڈ پر کا مربّع نصف قطر پر کے مربّع سے سہ چند ہے +

۸ دو مساوی دائروں کا اب مشترک کارڈ ہے - اگر ان میں سے ایک کا کارڈ ا ج جو اب کے برابر ہے - بڑھائے جانے سے دوسرے کے مرکز پر سے گزرے - تو اب نصف قطر کے برابر ہوگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۹ خط ا ب ج د پر تین برابر حصوں میں تقسیم ہؤا ہے - ج ن د ایک اکوی لیٹرل تکون ہے - ثابت کرو - کہ د △ ب ن ج کے گرد کے دائرے کا مرکز ہوگا - اور ان نقطہ ن پر اُس کا ٹینجنٹ ہوگا +

۱۰ ا ب ایک دئے ہوئے دائرے کا قطر ہے - اور اج ایک کارڈ ہے - ا اور ج پر کے ٹینجنٹ د پر ملتے ہیں - ثابت کرو - کہ $\widehat{\text{ادج}}$ = دوچند $\widehat{\text{ب اج}}$

۱۱ △ اب ج کے ضلعے △ دی ف کے ضلعوں سے اپنی اپنی نظیر سے دو چند ہیں - ثابت کرو - کہ △ اب ج کے گرد کے دائرے کا نصف قطر △ دی ف کے گرد کے دائرے کے نصف قطر سے دوچند ہوگا +

(△ اب ج کے گرد کے دائرے کا م مرکز لو - اور م ا م ب م ج کی ل ہ ص پر بترتیب تنصیف کرو - اور ثابت کرو - کہ △ ل ہ ص اور دی ف کانگروئنٹ ہیں)

تعریف

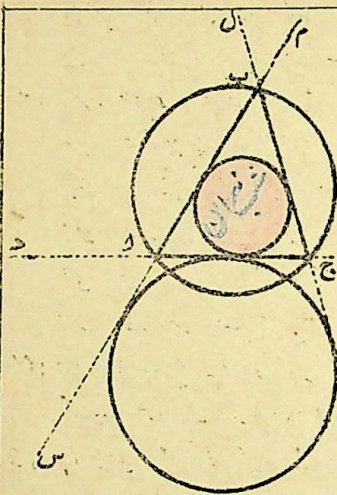
اب ج ایک △ ہے -

(۱) اس کے گرد یعنی نقاط ا ب ج سے گزرتا ہؤا جو دائرہ بنایا جاتا ہے - اسے تکون کا سرکم سرکل (Circumcircle) کہتے ہیں +

(۲) جو دائرہ تکون کے اندر ضلعوں کو مس کرتا ہؤا کھینچا جاتا ہے - اُسے تکون کا اِن سرکل (Incircle) کہتے ہیں +

(۳) تکون کے کوئی سے دو ضلعوں کو ایک سمت میں بڑھا کر ان دونو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

بڑھائے ہوئے ضلعوں
اور تکون کے تیسرے
ضلع کو مس کرتا ہوا
جو دائرہ کھینچا جاتا
ہے۔ اُسے تکون کا
اِکس سرکل (Excircle)
کہتے ہیں - چنانچہ
تکون کے ایسے تین
اِکس سرکل کھچ سکتے
ہیں - اور جس زاویے
کے گرد کے ضلعوں
کو بڑھا کر اکس سرکل بنایا جاتا ہے۔ وہ اسی زاویے کے اندر کہلاتا
ہے۔ مثلاً اوپر کی شکل میں اکس سرکل زاویہ ب کے اندر کہلائیگا۔

(۴) مفصلۂ بالا دائروں کے مرکزوں اور نصف قطروں کو ان ہی دائروں
کے ناموں سے منسوب کیا جاتا ہے۔ مثلاً سرکم سرکل کے مرکز کو
سرکم سنٹر (Circumcentre) اور نصف قطر کو سرکم ریڈیئس
(Circumradius) کہتے ہیں۔ اسی طرح اِن سنٹر (Incentre) -
اِن ریڈیس (Inradius) - اکس سنٹر (Excentre) اور اکس ریڈیس
(Exradius) کے الفاظ کے معنی بھی سمجھنے چاہئیں +

۱۲ تین دائرے جن کے مرکز ا ب ج ہیں۔ ایک ہی نقطہ س
پر سے گزرتے ہیں۔ اور ان کے دیگر نقاط تقاطع ن ق ہ ہیں
اگر ان ب ق س پر سے گزرتے ہیں - تو ثابت کرو - کہ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج ر بھی س پر سے گزریگا- اور یہ بھی ثابت کرو- کہ ن
ق ر ا ب س ایک ہی دائرے پر واقع ہیں +

۱۳ تین خطوط مستقیم س ا س ب س ج کو جو ایک ہی نقطے
س سے کھینچے ہوئے ہیں- نصف قطر مان کر دائرے کھینچے
گئے ہیں- جو ن ف ر پر آپس میں کاٹتے ہیں- اگر
ان ب ق س پر سے گزریں- تو ثابت کرو- کہ ج ر
بھی س پر سے گزرتا ہے +
(ن ق ر ب ج ج ا اب پر واقع ہیں)

۱۴ دائرہ ا ب ج کے کارڈوں ا ج ا ب پر م ر م ل
بترتیب عمود ہیں- تو ثابت کرو- کہ کارڈ ب ج = کارڈ ر ل +

۱۵ △ ا ب ج کے گرد کے دائرے کے کارڈ م ل م س م ن
ب ج ج ا ا ب پر بترتیب عمود ہیں- ثابت کرو- کہ
ا ل ب س ج ن متوازی ہیں +

۱۶ ا ل ب س ج ن ایک دائرے کے متوازی کارڈ ہیں- تو
ثابت کرو- کہ ل س ن پر سے جو کارڈ ب ج ج ا
ا ب پر عمود وار کھینچے جائینگے- ان کا ایک سرا مشترک ہوگا-
یہ بھی ثابت کرو- کہ ا ب ج پر سے جو کارڈ س ن
ن ل ل س پر بترتیب عمود وار کھینچے جائینگے- ان کا بھی
ایک سرا مشترک ہوگا +

۱۷ نقطہ م سے م ن م ف ایک دئے ہوئے دائرے پر اس طرح
ٹینجنٹ کھینچے گئے ہیں- کہ ن م ق (زاویہ) = کسی دئے ہوئے زاویہ-

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو ثابت کرو۔ نقطہ م کا لوکس ایک ہم مرکز دائرہ ہے ؞

۱۸ ایک دی ہوئی تکون کے اندر ایک دائرہ اور صرف ایک ہی دائرہ بن سکتا ہے ؞

چونکہ اس دائرے کا مرکز تکون کے زاویئے کی تنصیف کرنے والے خطوط پر ہوتا ہے۔ اور ان خطوط کا مشترک نقطہ ایک ہی ہوتا ہے ؞

۱۹ اکوی لیٹرل تکون کا

(۱) اِن ریڈئیس اس کے ارتفاع کی تہائی ہوتا ہے ؞

(۲) سرکم ریڈئیس اِن ریڈئیس کا دو چند ہوتا ہے ؞

(۳) اکس ریڈئیس اِن ریڈئیس کا سہ چند ہوتا ہے ؞

۲۰ اگر کسی چوکور کے اندر دائرہ بنایا جا سکے۔ تو اس کے مقابل کے ضلعوں کے مجموعے برابر ہونگے ؞

اس کے بر عکس

اگر کسی چوکور کے مقابل کے ضلعوں کے مجموعے برابر ہوں۔ تو اس کے اندر دائرہ بنایا جا سکتا ہے ؞

۲۱ کسی آئیسوسیلس تکون کے دو اکس سنٹروں کا جوڑ تکون کے قاعدے کے متوازی ہوتا ہے ؞

۲۲ ا ب ج د ایک سائی کلک چوکور ہے۔ جس کے وتر اج ب د ایک دوسرے کے ساتھ زاویئے قائمے بناتے ہیں۔ ثابت کرو۔

قوس اب + قوس ج د = قوس ب ج + قوس د ا ۔

(ب پر سے کارڈ ب ق متوازی ج د کے کھینچو) ؞

۲۳ ایک دائرے کے کارڈ اب دج بڑھانے سے م پر قائمے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

زاویوں پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ
قوس د ا = قوس اج + قوس ب د + قوس ب ج
(ب پر سے کارڈ ب ق متوازی ج د کے کھینچو) +

۲۴ دائرہ اب ج د کے قوسوں اب ب ج ج د د ا
کے نقاط تنصیف ی ف غ ہ ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ
ی غ ⊥ ف ہ پر +

۲۵ تکون اب ج کے سرکم سرکل کے قطر ب ل ج م ہیں۔ ا
سے ب ج پر ان عمود ڈالا گیا ہے۔ اس عمود پر میں ایک
ایسا نقطہ لیا ہے۔ کہ اس = ب م = ج ل، ثابت کرو۔
کہ ب س ج س ⊥ ہیں ج ا اب پر۔
(ثابت کرو۔ کہ ا ل ج س اور ب م اس متوازی الاضلاع ہیں) +

۲۶ خطوط ب ق ج ر جو تکون اب ج کے ضلعوں ج ا اب
پر عمود ہیں۔ نقطہ س پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ اور
اس بڑھانے سے ب ج کو ن پر کاٹتا ہے۔ تو ثابت کرو۔
کہ چوکوروں ب ن س ر ج ن س ق میں سے ہر ایک سائی کلک
ہے۔ اور اس لئے اس ⊥ ہے ب ج پر۔
(اس ر = اق ر = سائی کلک چوکور ب ر ق ج کے اندرونی
مقابل کے زاویے) +

۲۷ تکون اب ج کے سرکم سرکل کا کارڈ ام ب ج کو قائمے
زاویوں پر نقطہ ن پر کاٹتا ہے۔ ن ا پر میں ایک ایسا
نقطہ لیا گیا ہے۔ کہ ن س = ن م۔ ثابت کرو۔ کہ ب س

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج س بترتیب ⊥ ہیں ج ا اب پر۔

ثابت کرو۔ کہ $\widehat{\text{ب ا ن}}$ = $\widehat{\text{ب ج ن}}$ = $\widehat{\text{ب ج س}}$

نتیجہ۔ تکون کے کونوں سے مقابل کے ضلعوں پر جو عمود کھینچے جاتے ہیں۔ وہ ایک ہی نقطے ہر سے گزرتے ہیں۔ اس نقطے کو تکون کا آرتھو سنٹر (Orthocentre) کہتے ہیں ٭

۲۸ اگر دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں۔ اور ان کے مشترک کارڈ کو قاعدہ مان کر اس پر ہر ایک دائرے کے اندر تکونیں بنائی جائیں۔ ان میں سے ایک تکون کا آرتھو سنٹر دوسرے دائرے کے محیط پر ہوگا ٭

۲۹ تین مساوی دائرے ایک نقطہ س پر آپس میں کاٹتے ہیں۔ اور اُن کے دیگر نقاط تقاطع ا ب ج ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ س تکون ا ب ج کا آرتھو سنٹر ہے۔
یہ بھی ثابت کرو۔ کہ دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو تکون بنیگی۔ وہ ا ب ج کے ساتھ کانگروئنٹ ہوگی ٭

۳۰ دو تکونیں ایک قاعدے پر اس کے ایک ہی طرف واقع ہیں۔ اور ان کے زاویۂ راس برابر ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ تکونوں کے راسوں کا جوڑ اُن کے آرتھو سنٹروں کے جوڑ کا متوازی ہوگا ٭

۳۱ دو تکون ایک ہی قاعدے پر لیکن اس کے مخالف طرف واقع ہیں۔ اور ان کے زاویۂ راس سپلیمنٹری ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ تکونوں کے راسوں کا جوڑ اُن کے آرتھو سنٹر کے جوڑ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کا متوازی ہوگا ؎

۳۲ تکون اب ج کا قاعدہ اور زاویۂ راس دیا ہوا ہے - اور س اس کا آرتھو سنٹر ہے - ثابت کرو - کہ ا س کا طول ہمیشہ ایک ہی رہیگا ؎

۳۳ اب ج ایک تکون ہے
د ی ف ب ج ج ا اب کے نقاط تنصیف
ن ق ر اب ج سے ان ب ق ج ر ضلعوں پر عمود
س تکون کا سرکم سرکل
ص آرتھو سنٹر
ع س ص کا نقطۂ تنصیف
ک ل م جہاں ان ب ق ج ر سرکم سرکل کو ملتے ہیں -
ع ط ۶ اص ب ص ج ص کے نقاط تنصیف
اَ بَ جَ سرکم سرکل کے قطر

تو ثابت کرو

(۱) اَب ج ص ب جَ اص ج اَب ص متوازی الاضلاع ہیں ؎

(۲) ص اَ ص بَ ص جَ نقاط د ی ف پر سے گزرتے ہیں - اور وہاں تنصیف ہوتے ہیں ؎

(۳) ص ک ص ل ص م کی نقاط ن ق ر پر تنصیف ہوتی ہے ؎

(۴) اع = س د = ع ص

(۵) د ع = ی ط = ف ۶ اور ایک برابر ہے اب ج کے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سرکم ریڈییس کے)۔

(۶) دع ی ط ف ع نقطہ ہ پر سے گزرتے ہیں۔ اور وہاں ان کی تنصیف ہوتی ہے۔ اور ہ ع = ہ ط = ہ ف۔

(۷) ہ ن = ہ ق = ہ ر

(۸) نقاط د ی ف ن ق ر ع ط ع نو نقطے ایک دائرے پر واقع ہیں۔

اس دائرے کو نائن پائنٹ سرکل (Nine Poit Circle) کہتے ہیں۔

نعع۔ اس دائرے کا مرکز ہ مثلث اب ج کا مڈسنٹر (Midcentre) کہلاتا ہے۔

(۹) اد س ص نقطہ ی پر اس طرح ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ کہ دی = ½ اد س د = ½ س ص اور ہ ی = ½ ہ س۔

(۱۰) مثلثوں اب ج ب ج ص ج اص اب ص کے سرکم سرکل مساوی ہیں۔

(۱۱) مثلث ف ر ن کا ان سنٹر ص ہے۔

(۱۲) مثلث ن ف ر کے ا ب ر تین اکس سنٹر ہیں۔

(۱۳) $\widehat{\text{اب س}}$ = $\widehat{\text{ص ب ج}}$

$\widehat{\text{ب ج س}}$ = $\widehat{\text{ص ج ا}}$

$\widehat{\text{ج اس}}$ = $\widehat{\text{ص اب}}$

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۴۴ کسی تکون کا ایک زاویہ دوسرے سے بقدر قائمے کے بڑا ہے۔ ثابت کرو۔ کہ تکون کے سرکم سرکل کا ٹینجنٹ جو تکون کے کسی راس پر سے کھینچا گیا ہے۔ مقابل کے ضلع پر عمود ہوگا *

۴۵ اج ب ادب دو باہم کاٹنے والے دائرے ہیں۔ ج د پر کے ٹینجنٹ ی پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ نقاط ب ج د ی ایک ہی دائرے پر واقع ہیں *

(اب کو ملاؤ۔ اور ک ۳ ش ۳۲ سے کام لو) *

۴۶ اج ب ادب دو باہم کاٹنے والے دائرے ہیں۔ اور اج اد دائروں ادب اج ب کو نقطہ ا پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ $\widehat{\text{ابج}} = \widehat{\text{ابد}}$

(ک ۳ ش ۳۲ سے کام لو) *

۴۷ دائرہ اب ج د کے تین برابر کارڈ اب ب ج ج د ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ اب ج د اُس دائرے کے ٹینجنٹ ہونگے جو نقاط ب ج اور دائرہ اب ج د کے مرکز پر سے گزرتا ہے *

۴۸ اب اج دائرہ ب ج د کے ٹینجنٹ ہیں۔ اب اج کو ی ف تک بڑھایا گیا ہے۔ کہ ب ی = ب ج = ج ف ثابت کرو۔ کہ ی ب ج ف ایسے دائرے پر واقع ہیں۔ جس کا سنٹر دائرہ ب ج د پر واقع ہے *

۴۹ کسی دائرے کے دو کارڈ ایک دئے ہوئے نقطے پر قائمے زاویوں پہ باہم کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو۔ کہ ان کارڈوں پر کے مربعوں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کا مجموعہ ہمیشہ ایک ہی رہیگا ٭

۴۰ اگر ایک سائکل چوکور کے وتر اج ب د ایک معیّن نقطہ ن پر قائمہ زاویوں پر باہم کاٹیں۔ تو اب ب ج ج د کے نقاطِ تنصیف ایک ایسے معیّن دائرے پر ہونگے۔ جس کا مرکز نقطہ ن اور دئے ہوئے دائرے کے مرکز کے بیچوں بیچ واقع ہوگا ٭

۴۱ فرض کرو۔ دو دائرے اندر کی طرف نقطہ ا پر مس کرتے ہیں۔ اور ایک کا نصف قطر دوسرے کے قطر کے برابر ہے۔ ا پر سے بڑے کا قطر اب کھینچو۔ اور ب ن چھوٹے دائرے کا ٹینجنٹ کھینچو۔ ا ن کو ملاؤ۔ ثابت کرو۔ کہ ب ن پر کا مربّع ان پر کے مربّع سے سہ چند ہوگا ٭

۴۲ ک ۳ ش ۱۵ و ۲۵ کی مدد سے ثابت کرو۔ کہ تمام مساوی قائم الزوایوں میں سے مربّع کا پیری میٹر سب سے کم ہوتا ہے ٭

سوال

۱ دو دئے ہوئے دائروں پر بترتیب ن ق ایسے نقطے معلوم کرو۔ کہ ن ق ایک دئے ہوئے محدود مستقیم خط کے برابر ہو۔ اور اس کا متوازی بھی ہو ٭

۲ ایک ایسا دائرہ کھینچو جو ایک دئے ہوئے نقطے سے گزرے۔ اور جس کے محیط سے تین دئے ہوئے نقطوں کا فاصلہ برابر ہو ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۳ تین دائرے بناؤ۔ کہ سب آپس میں باہر کی طرف مس کریں۔ اور اُن کے نصف قطر تین دئے ہوئے خطوں کے برابر ہوں ؛

۴ تین دائرے بناؤ۔ کہ اُن کے نصف قطر تین دئے ہوئے خطوں کے برابر ہوں۔ اور ان میں سے دو باہر کی طرف اور ایک اندر کی طرف مس کرے۔ (بتاؤ۔ نصف قطروں میں کیا نسبت ہونی چاہیئے۔ کہ حل ممکن ہو) ؛

۵ دو دائرے ج د ف ج ی غ جن کے مرکز ا ب ہیں۔ ج پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ج پر سے خط دی ایک دئے ہوئے مستقیم محدود خط کے برابر کھینچو۔
یہ بھی بتاؤ۔ کہ کس حالت میں حل ناممکن ہے ؛

۶ ایک مثلث کا زاویہ راس اور اس زاویے کے گرد کا ایک ضلع اور زاویہ راس سے قاعدے پر کے عمود کا طول دیا ہُوا ہے۔ مثلث بناؤ ؛

۷ اب ایک دائرے کا قطر ہے۔ اور اب میں ج ایک دیا ہُوا نقطہ ہے۔ محیط پر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جس پر اج ج ب میں سے ہر ایک کے مقابل کا زاویہ نصف قائمہ ہو ؛

۸ ایک ایسا دائرہ بناؤ۔ جو تین خطوط مستقیم کو مس کرے۔ شرط یہ ہے۔ کہ ان تینوں خطوط میں سے صرف دو متوازی ہوں۔ کُل نہیں ؛

۹ فرض کرو ل ز ل د دو خطوط مستقیم محدود ہیں۔ جو آپس میں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کوئی زاویہ بناتے ہیں۔ن ا میں ایک نقطہ ب لو۔ن د یا بڑھائے ہوئے ن د میں ایک ایسا نقطہ ج معلوم کرو۔کہ
سطح ا ن ن ب = سطح ج ن ن د +

تماس کے متعلق چند سوال

۱۰ ایسا دائرہ بناؤ۔جو دو دئے ہوئے نقطوں ا ب پر سے گزرے۔اور ایک دئے ہوئے خط ل م کو مس کرے۔
ا ب کو ملاؤ۔اور بڑھاؤ۔کہ ل م کو ج پر کاٹے۔ل م پر د ایسا نقطہ لو۔کہ سطح ج ا ج ب = $(ج د)^2$
ا ب د پر سے گزرتا ہوا دائرہ دائرۂ مطلوبہ ہوگا +

۱۱ ایسا دائرہ بناؤ۔جو دو دئے ہوئے نقطوں پر سے گزرے۔اور ایک دئے ہوئے دائرے کو مس کرے +

۱۲ ا ب ایک خط محدود اور ل م غیر محدود ہے۔ل م پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو۔جس پر ا ب کے مقابل کا زاویہ بڑے سے بڑا ہو +

۱۳ ایک دئے ہوئے دائرے د ی ف پر ایسے نقطے معلوم کرو۔جن پر ایک دئے ہوئے خط ا ب کے مقابل کے زاوئے (۱) بڑے سے بڑے اور (۲) چھوٹے سے چھوٹے ہوں +

۱۴ ایک ایسا دائرہ بناؤ۔جو ایک دئے ہوئے نقطے پر سے گزرے اور مس کرے
(۱) دو دئے ہوئے خطوں کو
(۲) ایک دئے ہوئے خط اور ایک دائرے کو

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۳) دو دئے ہوئے دائروں کو ٭

۱۵ ایک ایسا دائرہ بناؤ۔ جو مس کرے
(۱) دو دئے ہوئے مستقیم خطوں اور ایک دئے ہوئے دائرے کو ٭
(۲) دو دئے ہوئے دائروں اور ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو ٭
(۳) تین دئے ہوئے دائروں کو ٭

۱۶ ایک ایسا دائرہ بناؤ۔ جو ایک دئے ہوئے دائرے کو مس کرے۔ اور ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو ایک دئے ہوئے نقطے پر مس کرے ٭

۱۷ ایک ایسا دائرہ بناؤ۔ جو ایک دئے ہوئے دائرے کو کسی جگہ مس کرے۔ اور ایک اَور دائرے کو ایک دئے ہوئے نقطے پر مس کرے ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

خطِ سمشن

ا اب ج ایک مثلث ہے۔ اور اس کے سرکم سرکل کے محیط پر ن ایک نقطہ ہے۔ اگر ن سے مثلث کے ضلعوں پر ن د ن ی اور ن ف عمود ڈالے جائیں۔ تو د ی ف ایک خط میں واقع ہونگے۔

ن ا ن ب کو ملاؤ۔

تو چوکور ن ب د ف اور ن ف ا ی سائی کلک ہیں۔

∴ ن ف ی = ن ا ی = ن ب ج [ک ا ش ۲۲

∴ ن ف ی + ن ف د = ن ف د + ن ب د

= دو قائموں

∴ د ف اور ی ف ایک خط میں ہیں [ک ا ش ۱۴

تع۔ اس فگر میں خط د ف ی ن نقطے کے لحاظ سے مثلث اب ج کا خطِ سمشن یا پیڈل خط (Pedal) کہلاتا ہے۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۲ اوپر کی شکل کا عکس بھی صحیح ہے۔ یعنی
اگر کسی نقطہ ن سے تکون کے تینوں ضلعوں پر عمود
ڈالے جائیں۔ اور اُن عمودوں کے قدم ایک ہی خط
پر واقع ہوں۔ تو وہ نقطہ تکون کے سرکم سرکل پر
واقع ہوگا ٭

۳ اگر اوپر کی فگر میں نقطہ ن سے تین خط ن د ن ی
ن ف ایسے کھینچے جائیں۔ کہ ضلعوں ب ج ج ا ا ب
کے ساتھ ایک ہی طرف (یعنی ن کے کل دائیں یا کل بائیں)
برابر زاویئے بنائیں۔ تو بھی نقاط د ی ف ایک ہی خط
میں ہونگے ٭

(اس کا ثبوت بھی شکل (۱) کے ہے) ٭

۴ اوپر کی فگر میں ثابت کرو۔ کہ ن کے لحاظ سے تکون ا ب ج
کا خطِ رِمشن ضلع ب ج کے ساتھ برابر زاویہ بناتا ہے ٭

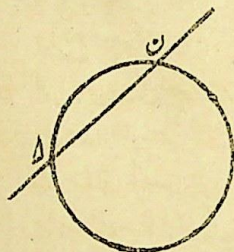
۵ اوپر کی فگر میں ثابت کرو۔ کہ تکون کا ن کے لحاظ سے
خطِ رِمشن تکون کے آرتھو سنٹر اور ن کے جوڑ کی تنصیف
کرتا ہے ٭

خطِ رِمشن کی بہت سی مثالیں ہیں۔ لیکن مبتدی طلبا کے لئے
اتنی ہی کافی سمجھی گئیں ٭

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دائرہ اور خطِ مماس

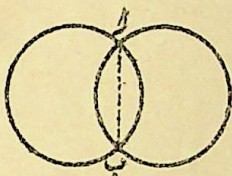
تبع - حال کی کتب ہندسہ میں خط کو (خواہ مستقیم ہو خواہ منحنی)
ایسا مجموعہ نقاط خیال کیا جاتا ہے۔
جس میں ہر ایک نقطہ اپنے ادھر
اُدھر دونو طرف کے ایک ایک نقطے سے
ملا رہتا ہے - اگر کسی دائرے پر
ا ن دو نقطے ہوں - تو اگر ا ن
عین متصل نہ ہوں - تو ان کے بیچ
میں قوس کا ایک ٹکڑا واقع ہوگا۔
اور خط ا ن دائرے کو کاٹیگا - ایسے خط کو دائرے کا سیکنٹ
(Secant) کہتے ہیں - لیکن اگر نقطہ ن ا کی طرف چلتے چلتے اس
کے اس قدر قریب آ جائے - کہ ان دونو کے بیچ میں اور کوئی
نقطہ حائل نہ رہے - تو اس خاص حالت میں خیال کیا جاتا ہے۔
کہ یہ خط ا پر دائرے کو مس کرتا ہے - اور اسی سے اس کو
خط مماس یا ٹینجنٹ کہا جاتا ہے -
چنانچہ ٹینجنٹ دائرے کو کاٹتا نہیں ÷
واضح ہو - کہ جب دائرے پر کسی نقطے سے اُس کے متصل کے
نقطہ پر جانا ہوتا ہے - تو اُس نقطے پر کے ٹینجنٹ پر سے ہی
گزرنا ہوتا ہے - چنانچہ اس نقطہ پر کا ٹینجنٹ دائرے کے اس
مقام کی سمت کو تعبیر کرتا ہے - اس لئے خط منحنی میں ٹینجنٹ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کی سمت ہمیشہ بدلتی رہتی ہے ÷

تع- جب دو دائرے آپس میں ا اور ب پر کاٹتے ہیں- تو ا اور ب کا جوڑ ان کا مشترک کارڈ ہوتا ہے- لیکن اگر نقطہ ب ا کی طرف چلتے چلتے اس کے عین متصل آ جائے- تو اس خاص حالت میں خط اب دونو دائروں کا ا پر مشترک ٹینجنٹ ہوگا- اور کہا جاتا ہے- کہ دائرے ا پر آپس میں مس کرتے ہیں-

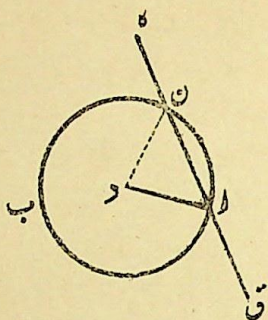
ٹینجنٹ اور تماس کے مذکورہ بالا معنی کی رو سے بہت سی دائروں کے متعلق شکلیں بآسانی حل ہو سکتی ہیں- اس قاعدے سے شکلوں کے حل کرنے کو قاعدۂ حد کہتے ہیں- توضیح کے لئے چند مثالیں نیچے لکھی جاتی ہیں-

مثالیں

۱- دائرے کا کسی نقطے پر کا ٹینجنٹ اس مقام کے نصف قطر کے ساتھ قائمہ زاوئے بناتا ہے- [ک ۳ ش ۱۸

فرض کرو- کہ ذن دائرے کا سیکنٹ ہے- اور د مرکز ہے- ن د کو ملاؤ-

دان = دن ا

دان + دن ا + ا دن = دو قائموں [ک ا ش ۳۲

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

لیکن جب ن ا کے عین متصل ہو۔ تو دن دا پر منطبق ہو جائیگا۔ اور ادن معدوم ہو جائیگا۔
پس اس حالت میں جب ان ا پر دائرے کا ٹینجنٹ ہوتا ہے۔
تو دان = دو قائموں ✤

۲۔ دو دائرے اندر یا باہر کی طرف مس کرتے ہیں۔ اُن کے مرکزوں کا جوڑ نقطۂ تماس پر سے گزرتا ہے۔[ک ۳ ش ۱۱ و ۱۲
نقطہ تماس پر مشترک ٹینجنٹ کھینچو۔ ہر ٹینجنٹ دونو دائروں کے اس مقام کے نصف قطر کے ساتھ قائمے زاویے بناتا ہے۔
پس یہ دونو نصف قطر ایک خط میں ہیں ✤

۳۔ اگر دائرے کا ایک ٹینجنٹ کھینچا جائے۔ اور نقطۂ تماس سے کوئی کارڈ کھینچا جائے۔ تو ان کے درمیان کا ہر ایک زاویہ دائرے کے متبادل قطعوں میں کے زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔ [ک ۳ ش ۲۲

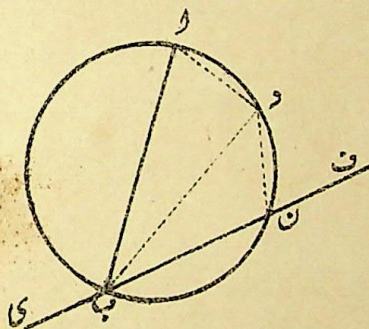
حل۔ فرض کرو۔ کہ ب ن ق دائرے کا ٹینجنٹ ہے۔
ب د قوس پر کوئی نقطہ ا لو۔
اب ا د دن کو ملاؤ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو چوکور ا ب ن د سائی کلک ہے۔

∴ د ن ف = ب ا د [ک ۳ ش ۲۲

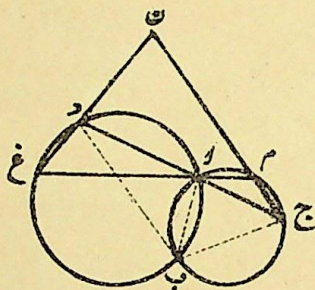
لیکن جب ن رفتہ رفتہ
چلکر ب کے عین متصل
آجاتا ہے۔ تو خط ب ن ف
ب پر ٹینجنٹ ہو جاتا ہے۔
اور ن د د ب پر
منطبق ہو جاتا ہے۔

∴ د ب ن اس حالت
میں د ن ف یعنی
ب ا د کے برابر ہو جاتا ہے ؛

۴ △ ا د غ ا ج م ن د ج ن م غ چار باہم کاٹنے والے خطوں سے بنائی گئی ہیں۔ ان سب تکونوں کے سرکم سرکل ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو۔ کہ ا د غ اور ا ج م تکونوں کے سرکم سرکل ا اور ب پر آپس میں کاٹتے ہیں۔
ا ب ج ب د ب کو ملاؤ۔
تو ک ۳ ش ۲۱ و ۲۲ سے بآسانی ثابت ہو جائیگا۔ کہ

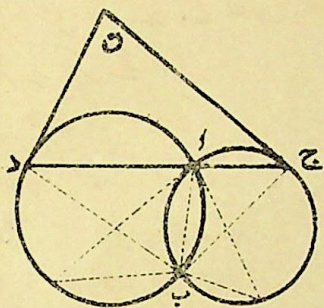
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ج ب د + ن = دو قائموں

∴ △ ن ج د کا سرکم سرکل ب پر سے گزریگا۔
اسی طرح ثابت ہو جائیگا۔ کہ △ ن م غ کا سرکم سرکل بھی ب پر سے گزرتا ہے +

۵ اوپر کی شکل میں اگر م اور غ ج اور د کے عین متصل ہو جائیں۔ تو ن د اور ن ج دائروں کے ٹینجنٹ ہو جائینگے۔
پس اس حالت میں ثابت ہو جاتا ہے۔ کہ
اگر دو دائرے ا اور ب پر باہم کاٹیں۔ اور کسی نقطہ تقاطع ا سے خط ا ج د دائروں کے محیط تک کھینچیں۔ اور ج ن اور د ن دائروں کے ٹینجنٹ کھینچے جائیں۔ تو
(۱) △ ن د ج کا سرکم سرکل ب پر سے گزریگا۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

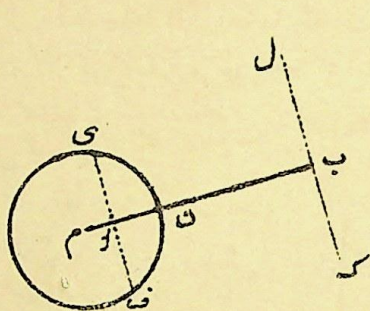
Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(۲) ب پر اج اور
اد کے مقابل کے
زاوئے برابر ہونگے +
(۳) اگر ا سے ہر ایک
دائرے کا ایک ایک
کارڈ دوسرے دائرے
کو مس کرتا ہوا کھینچا جائے - تو ان دونو کارڈوں
کے ب پر کے مقابل کے زاوئے برابر ہونگے +

۶ ک ۳ ش ۲۶ بھی قاعدۂ حد سے ثابت کرو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پول اور پولر

تع - کسی دائرے کے نصف قطر اور اسی بڑھائے ہوئے قطر پر مرکز کے ایک ہی طرف اگر دو نقطے ا اور ب ایسے لئے جائیں۔ کہ سطح م ا م ب = (م ن)^2 اور ا اور ب پر سے م ب پر عمود ک ل اور ف ی ڈالے جائیں۔

تو دائرے کے لحاظ سے نقطہ ا خط ک ل کا پول (Pole) کہلاتا ہے۔ اور خط ک ل نقطہ ا کا پولر (Polar) کہلاتا ہے۔ اسی طرح نقطہ ب خط ف ی کا پول اور خط ف ی نقطہ ب کا پولر کہلاتا ہے +

دائرے کے پول اور پولر کی بابت بہت سی شکلیں ہیں - لیکن اکثر مشکل ہیں - چند آسان شکلیں مثال کے طور پر نیچے دی جاتی ہیں +

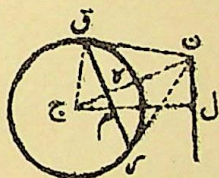
مثالیں

ا - دائرے کے باہر ایک دیا ہؤا نقطہ ہے - اگر اس نقطے سے دو ٹینجنٹ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

کھینچے جائیں - تو ثابت کرو - کہ نقاط تماس کا جوڑ اس نقطے کا پولر ہوگا +

۲- دائرے کے اندر یا باہر ایک دیا ہؤا نقطہ م ہے - اس نقطے سے گزرتا ہؤا کوئی کارڈ ق س کھینچا گیا ہے - ثابت کرو - کہ کارڈ کے سروں پر کے دو ٹینجنٹ ہمیشہ اس نقطے کے پولر پر آپس میں کاٹینگے -

فکر بیں بڑھائے ہوئے ج م پر ن ل عمود ڈالو - تو ق س ن کا پولر ہے -

∴ سطح ج ہ . ج ن = (ج ق)²

لیکن چوکور م ہ ن ل سائی کلک ہے - [ک ۳ ش ۲۲

∴ سطح ج م . ج ل = سطح ج ہ . ج ن

= (ج ق)² [ک ۳ ش ۲۶

∴ ن ل م کا پولر ہے - یعنی نقطہ ن م کے پولر پر واقع ہے +

بیرونی نقطے کی حالت میں بھی اسی طرح کا ثبوت ہوگا +

۳- اوپر کی شکل کا عکس بھی صحیح ہے - یعنی

اگر کسی دئے ہوئے خط کے کسی نقطے سے دائرے کے دو ٹینجنٹ کھینچے جائیں - تو نقاط تماس کا جوڑ ہمیشہ اس دئے ہوئے خط کے پول پر سے گزریگا +

۴- اگر کسی دائرے کے لحاظ سے کوئی نقطہ م کسی دوسرے نقطہ ن کے پولر پر واقع ہو - تو نقطہ ن بھی نقطہ م کے پولر

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پر واقع ہوگا +

۵- دو دئے ہوئے نقطوں کے پولروں کا نقطۂ تقاطع دئے ہوئے نقطوں کے جوڑوں کا پول ہوتا ہے +

۶- دو دئے ہوئے خطوں کے پولوں کا جوڑ اُن خطوں کے نقطۂ تقاطع کا پولر ہوگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ریڈیکل ایکسس

تع - اگر کسی نقطے سے دو دئے ہوئے دائروں کے ٹینجنٹ برابر ہوں۔ تو اس نقطے کا لوکس ایک خط ہوتا ہے۔ جس کو دائروں کا ریڈیکل ایکسس (Radical Axis) کہتے ہیں +

(۱) اگر دو دائرے آپس میں کاٹیں - تو ان کا مشترک کارڈ ان کا ریڈیکل ایکسس ہوتا ہے [ک ۳ ش ۳۴

(۲) اگر دو دائرے آپس میں مس کریں - تو ان کا مشترک ٹینجنٹ ان کا ریڈیکل ایکسس ہوتا ہے +

(۳) دو دائرے دئے ہوئے ہیں - ثابت کرو - کہ ان کا ریڈیکل ایکسس ان کے مرکزوں کے جوڑ پر کا عمود ہے -
اور اس ریڈیکل ایکسس کا مقام بھی معلوم کرو -
دائروں کے مشترک ٹینجنٹ کھینچو - ان کے نقاط تنصیف کا جوڑ ریڈیکل ایکسس ہوگا +

(۴) تین دئے ہوئے دائروں میں سے ہر دو دو کے ریڈیکل ایکسس ایک ہی نقطے پر سے گزرتے ہیں +
تع - اس نقطے کو دائروں کا ریڈیکل سنٹر (Radical centre) کہتے ہیں +

(۵) کسی تکون کے ضلعوں کو قطر مان کر تین دائرے بنائے گئے ہیں - ثابت کرو - کہ تکون کا آرتھو سنٹر اور ریڈیکل سنٹر ایک ہی ہے +

(۶) اگر تین دائرے آپس میں نہ کاٹیں - تو ثابت کرو - کہ ایک دائرہ ایسا بن سکتا ہے - جو تینوں دائروں کو قائمے زاویوں پر کاٹے -
اس دائرے کا مرکز دئے ہوئے تینوں دائروں کا ریڈیکل سنٹر ہے +

ریڈیکل ایکسس اور ریڈیکل سنٹروں کی مثالیں اکثر مشکل ہیں - اسلئے اتنی ہی کافی سمجھی گئیں +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

انورشن (Inversion) یا قلب

تع - اگر کسی خط میں ایک معین نقطہ م لیا جائے - اور اس میں اور دو نقطے ن ل ایسے لئے جائیں - کہ سطح م ن م ل = کسی معین خط ق پر کے مربع - تو نقاط ن اور ل میں سے ہر ایک دوسرے کا نقطۂ مقلوب کہلاتا ہے - اور ق کی مقدار کو قلب کا ریڈیس کہتے ہیں - اور نقطہ م کو قلب کا مخرج یا قطب کہتے ہیں +

تع - اگر نقطہ ن کسی خط مستقیم یا دائرے کے محیط پر چلتا ہو - اور نقطہ ل ن کا قلب ہو - تو ل کے لوکس کو بلحاظ نقطہ م کے اس خط یا دائرے کا مقلوب کہتے ہیں +

(۱) ا اور ب دو نقطے ہیں - اور کسی معین نقطہ م کے لحاظ سے ل اور ن اُن کے نقاط مقلوب ہیں - ثابت کرو - کہ نقاط ا ب ن ل ایک ہی دائرے کے محیط پر واقع ہیں +

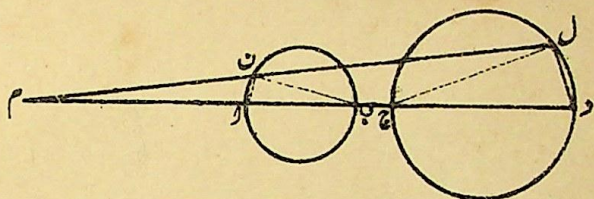
(ک ۳ ش ۳۶ و ۳۷ کے عکس سے حل ظاہر ہے) +

(۲) کسی دئے ہوئے خط کا مقلوب اس کے کسی نقطے کے لحاظ سے وہ دائرہ ہوتا ہے - جو اس نقطے سے گزرتا ہے - اور جس کا اس نقطے پر سے گزرتا ہوا قطر دئے ہوئے خط پر عمود ہوتا ہے +

(۳) کسی دائرے کا مقلوب بلحاظ کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ م کے ایک دوسرا دائرہ ہوتا ہے -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

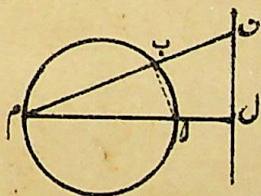
فرض کرو۔ کہ دئے ہوئے دائرے کا قطر م پر سے گزرتا ہے۔

نقاط ج د ا اور ب کے مقلوب لو۔ اور ن کا مقلوب ل
لو۔ تو ا ن د ل سائی کلک ہیں۔

∴ د̂ = ا ن م̂

اور ل م د̂ = ب ن ل̂

∴ د ل ج̂ قائمہ ہے۔

اور ل اس دائرے پر واقع ہے۔ جس کا قطر ج د ہے۔ پس
یہی دائرہ دئے ہوئے دائرے کا مقلوب ہے +

(۴) کسی دائرے کے محیط پر کسی معین نقطہ م کے لحاظ سے اس دائرے کا مقلوب ایک خط ہوتا ہے۔ جو نقطۂ معین پر سے گزرتے ہوئے قطر پر عمود ہوتا ہے۔

شکل میں ا اور ب کے نقاط مقلوب ل ن ہیں۔

∴ ا ب ل ن ایک دائرے پر واقع ہیں۔

∴ ل̂ + ا ب ن̂ = دو قائموں

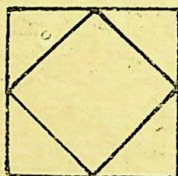
∴ اگر م ا دائرے کا قطر ہو۔ تو ل̂ = قائمہ
اور خط ل ن دائرے کا مقلوب ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

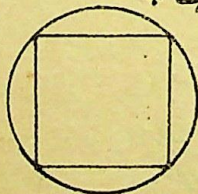
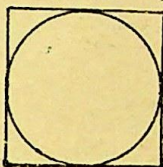
چوتھا مقالہ

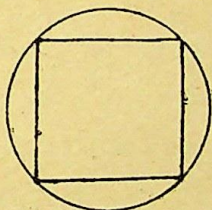
حدود

١ جب ایک شکل مستقیم الاضلاع کے زاوئے دوسری شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعوں پر اس طرح واقع ہوں کہ ایک ایک زاویہ ایک ایک ضلع سے مل جائے تو پہلی شکل مستقیم الاضلاع دوسری شکل مستقیم الاضلاع کے اندر (یا دوسری شکل مستقیم الاضلاع میں) بنی ہوئی کہلاتی ہے +

٢ علے ہذا القیاس جب ایک شکل کے سب ضلعے دوسری شکل کے زاویوں پر اس طرح گزریں کہ ایک ایک ضلع ایک ایک زاوئے سے مل جائے تو پہلی شکل دوسری شکل کے اوپر (یا دوسری شکل پر) بنی ہوئی کہلاتی ہے +

٣ جب شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاوئے محیط دائرہ پر واقع ہوں تو وہ شکل دائرے کے اندر بنی ہوئی کہلاتی ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۴ جب شکل مستقیم الاضلاع کا ہر ایک ضلع محیط دائرہ سے مس کرے تو وہ شکل دائرے کے اوپر بنی ہوئی کہلاتی ہے +

۵ علےٰ ہذا القیاس جب محیط دائرہ شکل مستقیم الاضلاع کے ہر ایک ضلع سے مس کرے تو وہ دائرہ شکل کے اندر بنا ہؤا کہلاتا ہے +

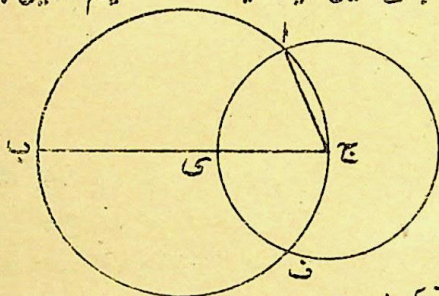
۶ جب محیط دائرہ شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں پر گزرے تو وہ دائرہ شکل کے اُوپر بنا ہؤا کہلاتا ہے +

۷ جب خط مستقیم کی حدّیں محیط دائرہ پر واقع ہوں تو وہ خط دائرے کے اندر رکھا ہؤا کہلاتا ہے +

پہلی شکل - سُؤال

دائرۂ مفروضہ میں ایک ایسا خط مستقیم رکھو
جو خط مستقیم مفروض کے برابر ہو بشرطیکہ
خط مفروض دائرے کے قطر سے بڑا نہو -

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو کہ اب ج دائرۂ مفروضہ ہے اور د خط مستقیم مفروض جو دائرے کے قطر سے بڑا نہیں ہے
ہم چاہتے ہیں کہ دائرہ اب ج میں ایک ایسا خط مستقیم رکھیں جو د کے برابر ہو

دائرہ اب ج کا قطر ب ج کھینچو
اگر ب ج د کے برابر ہو تو مطلب حاصل ہے
کیونکہ دائرہ اب ج میں یہی خط مستقیم ب ج جو د کے برابر ہے رکھا گیا
لیکن اگر ب ج د کے برابر نہو تو ب ج د سے بڑا ہے (فرضاً)
ج ی کو د کے برابر بناؤ (م ا ش ۳)
اور مرکز ج سے ج ی کی دوری پر دائرہ ا ی ف کھینچو
اور ج ا کو ملاؤ
تو ج ا د کے برابر ہوگا
چونکہ ج دائرہ ا ی ف کا مرکز ہے
اس لئے ج ا ج ی کے برابر ہے (م ا حد ۱۵)
مگر ج ی د کے برابر ہے (عملاً)
اس لئے د ج ا کے برابر ہے (علم ا)
پس دائرہ اب ج میں خط مستقیم ج ا خط مفروض د کے برابر جو

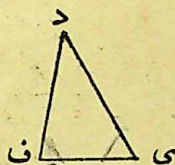
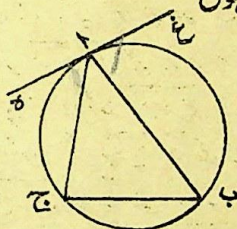
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دائرے کے قطر سے بڑا نہیں ہے رکھا گیا
اور یہی مطلوب تھا +

دوسری شکل - سؤال

دائرۂ مفروضہ میں ایک ایسا مثلّث بناؤ جس کے
زاوئے مثلّث مفروض کے زاویوں کے برابر ہوں -

فرض کرو اب ج دائرۂ مفروضہ ہے اور دی ف مثلّث مفروض
ہم چاہتے ہیں کہ دائرہ اب ج میں ایک ایسا مثلّث بنائیں جس کے
زاوئے مثلّث دی ف کے زاویوں کے برابر ہوں

دائرے سے نقطہ ا پر مس کرتا ہوا خط مستقیم غ ا ہ کھینچو (م ۳ ش ۱۷)
اور خط مستقیم اہ کے نقطہ ا پر زاویہ ہ ا ج زاویہ دی ف کے برابر بناؤ (م ا ش ۲۳)
اور خط مستقیم اغ کے نقطہ ا پر زاویہ غ اب زاویہ دف ی کے برابر بناؤ
اور ب ج کو ملاؤ
تو اب ج مثلّث مطلوب ہوگا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چونکہ ہ اغ دائرہ اب ج سے مس کرتا ہے اور اج نقطۂ تماس سے کھینچا گیا ہے

اس واسطے زاویہ ہ اج زاویہ اب ج کے برابر ہے جو اُس کے قطعۂ متبادلہ میں واقع ہے (م ۳ ش ۳۲)

مگر ہ اج دی ف کے برابر ہے (عملاً)

اس لیئے اب ج بھی دی ف کے برابر ہے (علم ۱)

اسی دلیل سے زاویہ اج ب زاویہ دف ی کے برابر ہے

اس لیئے باقی زاویہ ب اج باقی زاویہ ی دف کے برابر رہا (م ۱ ش ۳۲ علم ۱)

پس مثلّث اب ج ایسا مثلّث ہے جس کے زاوئے مثلّث دی ف کے زاویوں کے برابر ہیں

اور وہ دائرہ اب ج میں بنگیا

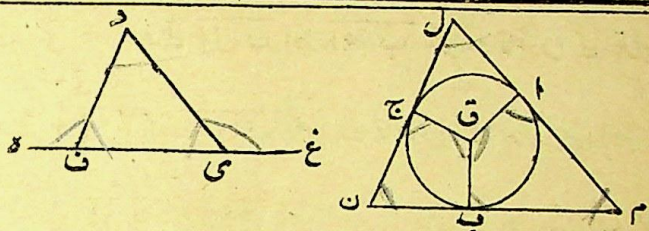
اور یہی مطلوب تھا +

تیسری شکل - سُؤال

دائرۂ مفروضہ پر ایک ایسا
مثلّث بناؤ جس کے زاوئے
مثلّث مفروض کے زاویوں
کے برابر ہوں -

فرض کرو اب ج دائرۂ مفروضہ ہے اور دی ف مثلّث مفروض ہم چاہتے ہیں دائرہ اب ج پر ایک ایسا مثلّث بنائیں جس کے زاوئے مثلّث دی ف کے زاویوں کے برابر ہوں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ی ف کو دونو طرف نقطوں غ اور ہ تک بڑھاؤ

دائرہ ا ب ج کا مرکز ق دریافت کرو (م ۳ ش ۱)

اور ق سے کوئی سا خط مستقیم ق ب کھینچو

خط مستقیم ق ب کے نقطہ ق پر زاویہ ب ق ا زاویہ د ی غ کے

اور زاویہ ب ق ج زاویہ د ف ہ کے برابر بناؤ (م ۱ ش ۲۳)

اور نقطوں ا اور ب اور ج سے خط مستقیم ل ا م اور م ب ن

اور ن ج ل کھینچو جو دائرہ ا ب ج سے مس کریں (م ۳ ش ۱۷)

تو ل م ن مثلث مطلوب ہوگا

چونکہ ل م اور م ن اور ن ل دائرہ ا ب ج سے نقطوں ا اور ب
اور ج پر مس کرتے ہیں

اور مرکز سے ان نقطوں تک ق ا اور ق ب اور ق ج خط کھینچے گئے
ہیں

تو زاویوں ا اور ب اور ج میں سے ہر ایک قائمہ ہے (م ۳ ش ۱۸)

اور چونکہ شکل ذو اربعۃ الاضلاع ا م ب ق کے چاروں زاویے چار
قائموں کے برابر ہیں

کیونکہ وہ شکل دو مثلثوں میں تقسیم ہوسکتی ہے

اور چونکہ ان میں سے دو زاویے یعنی ق ا م اور ق ب م قائمے ہیں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اس لئے باقی دو زاوئے اق ب اور ا م ب ملکر دو قائموں کے برابر ہیں (علم ۳)

مگر زاوئے دی غ اور دی ف بھی دو قائموں کے برابر ہیں (م ا ش ۱۳)

اس لئے زاویہ اق ب اور ا م ب زاویوں دی غ اور دی ف کے برابر ہیں (علم ۱)

اور ان میں سے اق ب دی غ کے برابر ہے (عملاً)

اس لئے باقی زاویہ ا م ب باقی زاویہ دی ف کے برابر رہا (علم ۳)

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ ل ن م دف ی کے برابر ہے

اور اس واسطے باقی زاویہ م ل ن باقی زاویہ ی دف کے برابر ہے (م ا ش ۳۲ و علم ۳)

پس مثلث ل م ن ایسا مثلث ہے جس کے زاوئے مثلث دی ف کے زاویوں کے برابر ہیں

اور وہ دائرہ ا ب ج پر بنگیا

اور یہی مطلوب تھا +

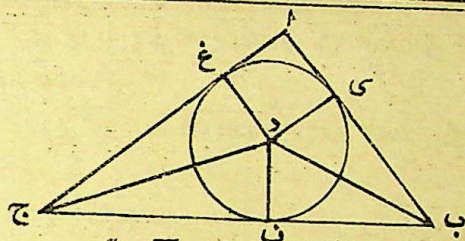
چوتھی شکل - سوال

مثلث مفروض میں ایک دائرہ بناؤ-

فرض کرو ا ب ج مثلث مفروض ہے

ہم چاہتے ہیں کہ ا ب ج میں ایک دائرہ بنائیں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مستقیم خطوں ب د اور ج د سے جو نقطہ د پر آپس میں ملتے ہیں
زاویوں ا ب ج اور ب ج ا کی تنصیف کرو (م اش ۹)
اور نقطہ د سے د ی اور د ف اور د غ ا ب اور ب ج اور ج ا
پر عمود ڈالو (م اش ۱۲)
اور چونکہ زاویہ ی ب د زاویہ ف ب د کے برابر ہے
کیونکہ زاویہ ا ب ج ب د سے تنصیف ہؤا ہے
اور زاویہ قائمہ ب ی د زاویۂ قائمہ ب ف د کے برابر ہے (علم ۱۱)
اس لئے دو مثلثوں ی ب د اور ف ب د میں سے ایک کے دو
زاوئے دوسرے کے دو زاویوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں
اور ضلع ب د جو ہر ایک مثلث میں برابر زاویوں کے مقابل ہے
دونو میں مشترک ہے
اس لئے اُن کے باقی ضلع بھی برابر ہیں (م اش ۲۶)
اس لئے د ی د ف کے برابر ہے
اسی وجہ سے د غ د ف کے برابر ہے
اسی سبب سے د ی د غ کے برابر ہے (علم ۱)
تو تینوں خط مستقیم د ی اور د ف اور د غ باہم برابر ہیں
اور جو دائرہ مرکز د سے ان تینوں خطوں میں سے ایک کی دوری

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

پر کھینچا جائے تو وہ باقی دونو خطوں کی حدوں پر سے گذریگا اور خطوں مستقیم اب اور ب ج اور ج ا سے مس کریگا

کیونکہ زاویوں ی اور ف اور غ میں سے ہر ایک قائمہ ہے اور جو خط مستقیم قطر کی حد سے اُس پر قائمے بناتا ہؤا کھینچا جائے وہ دائرے سے مس کرتا ہے (م ۳ ش ۱۶)

اس لئے خطوں اب اور ب ج اور ج ا میں سے ہر ایک دائرے سے مس کرتا ہے

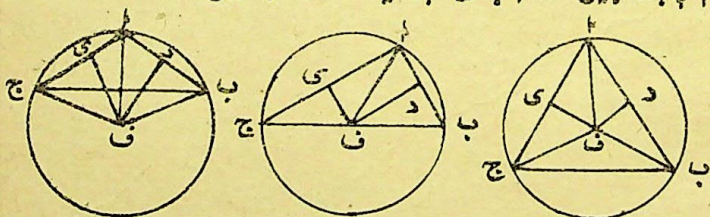
پس دائرہ ی د ف غ مثلث اب ج میں بنگیا

اور یہی مطلوب تھا *

پانچویں شکل - سوال

مثلث مفروض پر ایک دائرہ بناؤ-

فرض کرو اب ج مثلث مفروض ہے

ہم چاہتے ہیں کہ اب ج پر ایک دائرہ بنائیں

اب اور اج کو نقطوں د اور ی پر تنصیف کرو (م ا ش ۱۰)

اور ان نقطوں سے د ف اور ی ف اب اور اج پر قائمے بناتے ہوئے کھینچو (م ا ش ۱۱)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

تو دف اور ی ف بڑھانے کے بعد آپس میں مل جائینگے
کیونکہ اگر نہ ملیں تو متوازی ہونگے
اس لئے اب اور اج بھی جو ان پر قائمے بناتے ہیں متوازی ہونگے
اور یہ باطل ہے
فرض کرو وہ ف پر ملتے ہیں
ف ا کو ملاؤ
اور اگر نقطہ ف ب ج میں نہ ہو
تو ب ف اور ج ف کو ملاؤ
چونکہ اد دب کے برابر ہے
اور دف مشترک ہے اور اب پر قائمے بناتا ہے
اس لئے قاعدہ اف قاعدہ ف ب کے برابر ہے (م ا ش ۴)
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ج ف ف ا کے برابر ہے
اور اسی سبب سے ب ف ف ج کے برابر ہے (علم ۱)
اور ف ا اور ف ب اور ف ج باہم برابر ہیں
پس جو دائرہ مرکز ف سے ان تینوں خطوں میں سے کسی ایک کی
دوری پر کھینچا جائے وہ باقی دونو خطوں کی حدّوں سے گزریگا
اور مثلث اب ج پر بنجائیگا
اور یہی مطلوب تھا *

حاصل

ظاہر ہے کہ جب دائرے کا مرکز مثلث کے اندر واقع ہو تو اُس کا
ہر ایک زاویہ قائمے سے کم ہوتا ہے (م ۳ ش ۳۱) کیونکہ ہر ایک

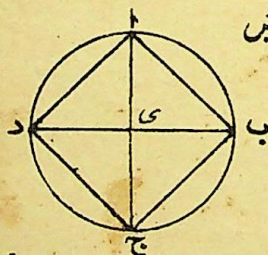
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

زاویہ ایسے قطعے میں واقع ہے جو نصف دائرے سے بڑا ہے لیکن جب مرکز مثلث کے کسی ضلع پر ہو تو اُس ضلع کے مقابل کا زاویہ نصف دائرے میں ہونے کے سبب قائمہ ہوگا (م ۳ ش ۳۱) اور اگر مرکز مثلث کے باہر واقع ہو تو اُس ضلع کے مقابل کا زاویہ جس کے باہر مرکز ہے اپنے قطعے میں واقع ہونے کے سبب جو نصف دائرے سے کم ہے قائمے سے بڑا ہوگا (م ۳ ش ۳۱) اور بالعکس اگر مثلث مفروض حاد الزوایا ہو تو دائرے کا مرکز مثلث کے اندر واقع ہوگا اور اگر قائم الزاویہ ہو تو مرکز وتر قائمہ پر ہوگا اور اگر منفرج الزاویہ ہو تو مرکز مثلث کے باہر ہوگا اور اُس ضلع کی طرف واقع ہوگا جو زاویۂ منفرجہ کے مقابل ہے ؎

چھٹی شکل - سؤال

دائرۂ مفروضہ میں مربع بناؤ -

فرض کرو اب ج د دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ اب ج د میں مربع بنائیں

قطر اج اور ب د آپس میں قائمے بناتے ہوئے کھینچو (م ۳ ش ا و م ا ش ۱۱)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

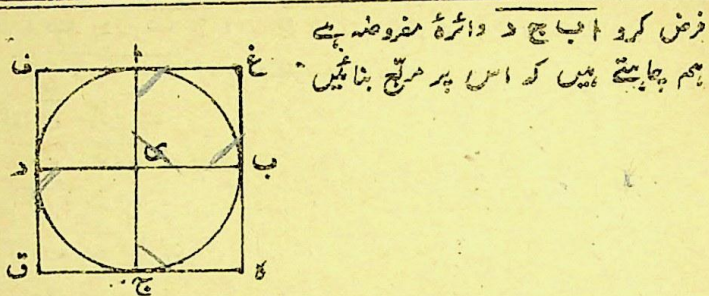
اور ا ب اور ب ج اور ج د اور د ا کو ملاؤ
تو شکل ا ب ج د مربع مطلوب ہوگا
چونکہ ی مرکز ہے
تو ب ی ی د کے برابر ہے
اور ی ا مشترک اور ب د پر قائم بناتا ہے
تو قاعدہ ب ا قاعدہ ا د کے برابر ہے (م اش ۴)
اور اسی سبب سے ب ج اور ج د میں سے ہر ایک ب ا یا ا د
کے برابر ہے
اس لئے شکل ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د متساوی الاضلاع ہے اور
وہ قائم الزوایا بھی ہوگی
چونکہ خط مستقیم ب د دائرہ ا ب ج د کا قطر ہے
تو ب ا د نصف دائرہ ہے
اور زاویہ ب ا د قائمہ ہے (م ۳ ش ۳۱)
اسی سبب سے زاویوں ا ب ج اور ب ج د اور ج د ا میں سے
ہر ایک قائمہ ہے
اس لئے شکل ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د قائم الزوایا ہوئی
اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہے
پس وہ ایک مربع ہے (م احد ۳۰) اور دائرہ ا ب ج د میں بنگیا ہے
اور یہی مطلوب تھا +

ساتویں شکل - سوال

دائرۂ مفروضہ پر مربع بناؤ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو ا ب ج د دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ اس پر مربع بنائیں

دائرہ ا ب ج د کے دو قطر اج اور ب د آپس میں قائمے بناتے ہوئے کھینچو
اور نقطوں ا اور ب اور ج اور د سے ف غ اور غ ہ اور ہ ق
اور ق ف دائرے سے مس کرتے ہوئے کھینچو (م ۳ ش ۱۷)
تو شکل غ ہ ق ف مربع مطلوب ہوگا
چونکہ ف غ دائرہ ا ب ج د سے مس کرتا ہے
اور ی ا مرکز ی سے نقطہ تماس ا تک کھینچا گیا ہے
اس لئے نقطہ ا کے زاویے قائمے ہیں (م ۳ ش ۱۸)
اسی دلیل سے ب اور ج اور د کے زاویوں میں سے بھی ہر ایک
قائمہ ہے
اور چونکہ زاویہ ا ی ب قائمہ ہے
اور ی ب غ بھی قائمہ ہے
اس لئے غ ہ اج کا متوازی ہے (م ا ش ۲۸)
اسی دلیل سے اج ف ق کا متوازی ہے
اور اسی طور سے ثابت ہو سکتا ہے کہ غ ف اور ہ ق میں سے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہر ایک ب ی د کا متوازی ہے

اس لئے شکلیں غ ق اور غ ج اور اق اور ف ب اور ب ق متوازی الاضلاع ہیں

اور اسی سبب سے غ ف ہ ق کے اور غ ہ ف ق کے برابر ہے (م ا ش ۳۴)

اور چونکہ اج ب د کے برابر ہے

اور غ ہ اور ف ق میں سے بھی ہر ایک اج کے برابر ہے

اور ب د غ ف اور ہ ق میں سے ہر ایک کے برابر ہے

تو غ ہ اور ف ق میں سے ہر ایک غ ف یا ہ ق کے برابر ہوا

اس لئے شکل ذو اربعۃ الاضلاع ف غ ہ ق متساوی الاضلاع ہوئی اور وہ قائم الزوایا بھی ہوگی

کیونکہ غ ب ی ا متساوی الاضلاع ہے

اور ا ی ب قائمہ

اس لئے ا غ ب بھی قائمہ ہے (م ا ش ۳۴)

اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ہ اور ق اور ف کے زاوئے بھی قائمے ہیں

اس لئے شکل ذو اربعۃ الاضلاع ف غ ہ ق قائم الزوایا ہوئی اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہے

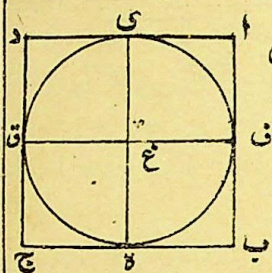
پس وہ ایک مربع ہے اور دائرہ ا ب ج د پر بنگیا

اور یہی مطلوب تھا +

آٹھویں شکل ۔ سوال

مربع مفروض میں دائرہ بناؤ ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو ا ب ج د مربع مفروض ہے
ہم چاہتے ہیں کہ ا ب ج د میں دائرہ بنائیں

نقطوں ف اور ی پر ضلعوں ا ب اور ا د کی تنصیف کرو (م اش ۱۰)
اور ی سے ی ہ ا ب یا د ج کا متوازی (م اش ۳۱)
اور ف سے ف ق ا د یا ب ج کا متوازی کھینچو
تو شکلوں ا ق اور ق ب اور ا ہ اور ہ د اور ا غ اور غ ج اور
ب غ اور غ د میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع قائم الزّوایا ہے
اور اُن کے مقابل کے ضلع برابر ہیں (م اش ۳۴)
اور چونکہ ا د ا ب کے برابر ہے (م احد ۳۰)
اور ا ی ا د کا نصف ہے اور ا ف ا ب کا
اس لئے ا ی ا ف کے برابر ہے (علم ۷)
اسی سبب سے اُن کے مقابل کے ضلع بھی برابر ہیں
یعنی ف غ غ ی کے برابر ہے
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ غ ہ اور غ ق میں سے ہر ایک ف غ
یا غ ی کے برابر ہے
اس لئے چاروں خط مستقیم غ ی اور غ ف اور غ ہ اور غ ق باہم
برابر ہیں

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور جو دائرہ مرکز ع سے اُن چاروں میں سے کسی ایک کی دوری پر کھینچا جائے تو وہ باقی تینوں کی حدوں پر سے گزریگا

اور خطوں مستقیم اب اور ب ج اور ج د اور د ا سے مس کریگا کیونکہ نقطوں ی اور ف اور ہ اور ق کے زاویوں میں سے ہر ایک قائمہ ہے

اور خط مستقیم جو قطر کی حد سے اُس پر قائمے بناتا ہوا کھینچا جاتا ہے دائرے سے مس کرتا ہے (م ۳ حاصل ش ۱۶)

اس لئے خط مستقیم اب اور ب ج اور ج د اور د ا میں سے ہر ایک دائرے سے مس کریگا

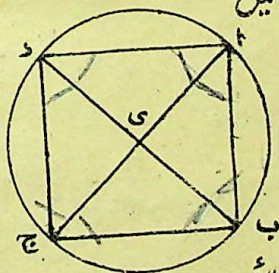
پس یہی دائرہ مربع اب ج د میں بنجائیگا

اور یہی مطلوب تھا ؛

نویں شکل - سؤال

مربع مفروض پر دائرہ بناؤ۔

فرض کرو اب ج د مربع مفروض ہے

ہم چاہتے ہیں کہ اب ج د پر دائرہ بنائیں

اج اور ب د کو جو ی پر تقاطع کریں ملاؤ

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چونکہ د ا اب کے برابر ہے (م اعد ۳۰)
اور اج مثلثوں د اج اور ب اج میں مشترک ہے۔
تو دو ضلعے د ا اور اج دو ضلعوں ب ا اور اج کے اپنی اپنی نظیر
کے برابر ہیں
اور قاعدہ دج قاعدہ ب ج کے برابر ہے
اس لئے زاویہ د اج زاویہ ب اج کے برابر ہے (م اش ۸)
تو خط مستقیم اج سے زاویہ د اب کی تنصیف ہوگئی
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ زاوئے اب ج اور ب اج د اور ج د ا
خطوں مستقیم ب د اور اج سے تنصیف ہوگئے ہیں
اب چونکہ زاویہ د اب زاویہ اب ج کے برابر ہے (م اعد ۳۰)
اور زاویہ ی اب د اب کا نصف ہے اور ی ب ا اب ج کا
اس لئے زاویہ ی اب زاویہ ی ب ا کے برابر ہے (علم ۷)
اور اسی سبب سے ضلع ی ا ضلع ی ب کے برابر ہے (م اش ۶)
اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ خط مستقیم ی ج اور ی د میں سے
ہر ایک ی ا یا ی ب کے برابر ہے
اس لئے چاروں خط مستقیم ی ا اور ی ب اور ی ج اور ی د باہم
برابر ہیں
پس جو دائرہ مرکز ی سے ان چاروں میں سے کسی ایک کی دوری پر
کھینچا جائے وہ باقی تینوں کی حدوں پر سے گزریگا
اور مربع اب ج د پر بنجائیگا
اور یہی مطلوب تھا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دسویں شکل ۔ سُؤال

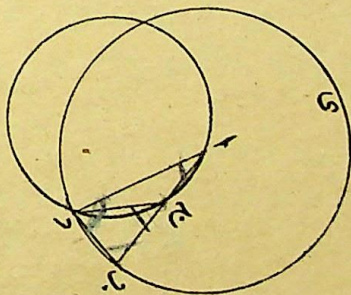
ایک ایسا مثلّث متساوی الساقین بناؤ
جس کے قاعدے کے دونو زاویوں ہیں
سے ہر ایک تیسرے زاوئے سے دوچند ہو۔

کوئی خط مستقیم اب فرض کرو اور اُسے نقطہ ج پر اس طرح تقسیم کرو کہ اب اور ب ج کی سطح ج ا کے مربّع کے برابر ہو (م ۲ ش ۱۱)

اور مرکز ا سے اب کی دوری پر دائرہ ب د ی بناؤ اور اُس میں ایک خط مستقیم ب د ا ج کے برابر جو دائرہ ب د ی کے قطر سے بڑا نہیں ہے رکھو (م ۴ ش ۱)

اور د ا کو ملاؤ

تو مثلّث اب د مثلّث مطلوب ہوگا

یعنی زاویوں اب د اور ا د ب میں سے ہر ایک زاویہ ب ا د سے دوچند ہوگا

د ج کو ملاؤ اور مثلّث ا د ج پر دائرہ ا ج د بناؤ (م ۴ ش ۵)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

چونکہ اب اور ب ج کی سطح اج کے مربّع کے برابر ہے
اور چونکہ اج ب د کے برابر ہے (عملاً)
تو اب اور ب ج کی سطح ب د کے مربّع کے برابر ہے (علم ۱)
اور چونکہ نقطہ ب سے جو دائرہ اج د کے باہر ہے دو خط مستقیم
ب ج ا اور ب د محیط تک کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک دائرے
کو قطع کرتا ہے اور دوسرا اُس سے ملتا ہے اور اب اور ب ج یعنی
تمام خط قاطع اور اُس کے اُس حصّے کی سطح جو دائرے کے باہر ہے
ب د کے مربّع کے برابر ہے جو اُس سے ملتا ہے
تو خط مستقیم ب د دائرہ اج د کو مس کرتا ہے (م ۳ ش ۳۷)
اور چونکہ ب د دائرے کو مس کرتا ہے اور د ج نقطہ تماس د سے
کھینچا گیا ہے
تو زاویہ ب د ج زاویہ د ا ج کے برابر ہے جو اُس کے قطعۂ متبادلہ
میں واقع ہے (م ۳ ش ۳۲)
ان میں سے ہر ایک پر زاویہ ج د ا کو زیادہ کرو
تو پورا زاویہ ب د ا دو زاویوں ج د ا اور د ا ج کے برابر
ہے (علم ۲)
مگر زاویۂ خارجہ ب ج د زاویوں ج د ا اور د ا ج کے برابر
ہے (م ا ش ۳۲)
اس واسطے ب د ا بھی ب ج د کے برابر ہے (علم ۱)
مگر ب د ا زاویہ ج ب د کے برابر ہے (م ا ش ۵)
کیونکہ ضلع ا د ضلع اب کے برابر ہے
تو ج ب د یا د ب ا ب ج د کے برابر ہے (علم ۱)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اسی سبب سے تینوں زاوئے ب د ا اور د ب ا اور ب ج د باہم برابر ہیں
اور چونکہ زاویہ د ب ج زاویہ ب ج د کے برابر ہے
تو ضلع ب د ضلع د ج کے برابر ہے (م اش ۶)
مگر ب د ج ا کے برابر بنایا گیا تھا
اس لئے ج ا بھی ج د کے برابر ہے (علم ۱)
اور زاویہ ج د ا زاویہ د ا ج کے برابر ہے (م اش ۵)
اس لئے زاوئے ج د ا اور د ا ج مل کر زاویہ د ا ج سے دو چند ہیں
مگر د ب ج د زاویوں ج د ا اور د ا ج کے برابر ہے (م اش ۳۲)
اس واسطے ب ج د بھی د ا ج سے دو چند ہے
اور ب ج د زاویوں ب د ا اور د ب ا میں سے ہر ایک کے برابر ثابت ہوچکا ہے
اس واسطے زاویوں ب د ا اور د ب ا میں سے ہر ایک زاویہ د ا ب سے دوچند ہے
پس ایک مثلث متساوی الساقین ا ب د ایسا بنگیا جس کے قاعدے کے زاویوں میں سے ہر ایک تیسرے زاوئے سے دوچند ہے
اور یہی مطلوب تھا +

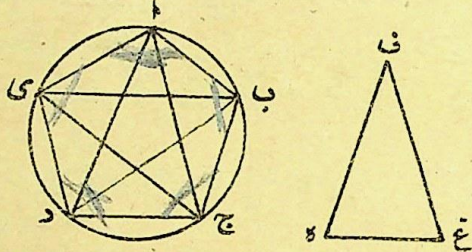
گیارھویں شکل - سوال

دائرۂ مفروضہ میں مخمس متساوی الاضلاع
دالزوایا بناؤ -

+ علم ہندسہ میں مطلق مخمس اور مسدس وغیرہا سے بھی متساوی الاضلاع والزوایا ہی مراد ہوتی ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو اب ج د ی دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ دائرہ اب ج د ی میں ایک مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا بنائیں

ف غ ہ ایک ایسا مثلّث متساوی الساقین بناؤ جس کے زاویوں غ اور ہ میں سے ہر ایک زاویہ ف سے دو چند ہو (م ۴ ش ۱۰)
اور دائرہ اب ج د ی میں مثلّث اج د بناؤ جس کے زاوئے مثلّث ف غ ہ کے زاویوں کے برابر ہوں (م ۴ ش ۲)
یعنی زاویہ ج ا د زاویہ ف کے برابر ہو
اور زاویوں اج د اور ج د ا میں سے ہر ایک زاویہ غ یا ہ کے برابر ہو
تو زاویوں اج د اور ج د ا میں سے ہر ایک زاویہ ج ا د سے دوچند ہے
مستقیم خطوں ج ی اور د ب سے زاویوں اج د اور ج د ا کی تنصیف کرو (م ا ش ۹)
اور اب اور ب ج اور د ی اور ی ا کو ملاؤ
تو اب ج د ی مخمّس مطلوب ہوگا۔
چونکہ اج د اور ج د ا میں سے ہر ایک ج ا د سے دوچند ہے
اور چونکہ یہ زاوئے مستقیم خطوں ج ی اور د ب سے تنصیف

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہو گئے ہیں
تو پانچوں زاوئے د ا ج اور ا ج ی اور ی ج د اور ج د ب
اور ب د ا باہم برابر ہیں
مگر مساوی زاوئے مساوی قوسوں پر واقع ہوتے ہیں (م ۳ ش ۲۶)
اس لئے پانچوں قوسیں ا ب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ا
باہم برابر ہیں
اور مساوی قوسوں کے مقابل مساوی خط مستقیم ہوتے ہیں (م ۳
ش ۲۹)
اس لئے پانچوں خط مستقیم ا ب اور ب ج اور ج د اور د ی اور
ی ا باہم برابر ہیں
اسی سبب سے مخمّس ا ب ج د ی متساوی الاضلاع ہے اور وہ
متساوی الزّوایا بھی ہے
چونکہ قوس ا ب قوس د ی کے برابر ہے
اگر ہر ایک پر ب ج د زیادہ کی جائے
تو پوری قوس ا ب ج د پوری قوس ی د ج ب کے برابر
ہوگی (علم ۲)
مگر زاویہ ا ی د قوس ا ب ج د پر اور زاویہ ب ا ی قوس ی د ج ب
پر ہے
اسی واسطے زاویہ ب ا ی زاویہ ا ی د کے برابر ہے (م ۳ ش ۲۷)
اسی دلیل سے زاویوں ا ب ج اور ب ج د اور ج د ی میں سے
ہر ایک زاویہ ب ا ی یا ا ی د کے برابر ہے
اسی سبب سے مخمّس ا ب ج د ی متساوی الزّوایا ہے

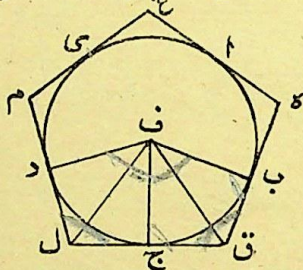
CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور یہ ثابت ہوچکا ہے کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہے
پس دائرۂ مفروضہ میں ایک مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا بنگیا
اور یہی مطلوب تھا +

بارھویں شکل - سؤال

دائرۂ مفروضہ پر مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا بناؤ -

فرض کرو ا ب ج د ی دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ دائرہ ا ب ج د ی پر ایک مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا بنائیں

فرض کرو کہ دائرے میں شکل گزشتہ کے موافق جو مخمّس بنایا جائے
اُس کے زاویوں کے نقطے ا اور ب اور ج اور د اور ی ہیں تو
قوسیں ا ب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ا باہم برابر
ہونگی (م ۴ ش ۱۱)
نقطوں ا اور ب اور ج اور د اور ی سے
غ ہ اور ہ ق اور ق ل اور ل م اور م غ دائرے کو مس کرتے ہوئے
کھینچو (م ۳ ش ۱۷)
تو شکل غ ہ ق ل م مخمّس مطلوب ہوگا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

مرکز ف دریافت کرو
اور ف ب اور ف ق اور ف ج اور ف ل اور ف د کو ملاؤ
چونکہ خط مستقیم ق ل دائرہ ا ب ج د ی کو نقطہ ج پر جہاں تک ف ج
مرکز ف سے کھینچا گیا ہے مس کرتا ہے
تو ف ج ق ل پر عمود ہوگا (م ۳ ش ۱۸)
اسی واسطے نقطہ ج کے زاویوں میں سے ہر ایک قائمہ ہے
اسی دلیل سے نقطوں ب اور د کے زاوئے بھی قائمے ہیں
اور چونکہ ف ج ق ایک زاویہ قائمہ ہے
تو ف ق کا مربع ف ج اور ج ق کے مربعوں کے برابر ہے (م ا ش ۴۷)
اسی طرح ف ق کا مربع ف ب اور ب ق کے مربعوں کے برابر ہے
اس واسطے ف ج اور ج ق کے مربعے ف ب اور ب ق کے مربعوں
کے برابر ہیں (علم ۱)
ان میں سے ف ج کا مربع ف ب کے مربع کے برابر ہے
اس لئے باقی ج ق کا مربع باقی ب ف کے مربع کے برابر رہا (علم ۳)
اور خط مستقیم ج ق ب ق کے برابر ہوا
اور چونکہ ف ب ف ج کے برابر ہے
اور ف ق مثلثوں ب ف ق اور ج ف ق میں مشترک ہے تو دو
ضلعے ب ف اور ف ق ج ف اور ف ق کے اپنی اپنی نظیر کے برابر
ہیں
اور قاعدہ ب ق قاعدہ ق ج کے برابر ثابت ہو چکا ہے اس لئے زاویہ
ب ف ق زاویہ ق ف ج کے برابر ہے (م ا ش ۸)
اور زاویہ ب ق ف ف ق ج کے برابر ہے (م ا ش ۴)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اسی باعث سے زاویہ ب ف ج زاویہ ق ف ج سے اور ب ق ج
ف ق ج سے دوچند ہے
اسی دلیل سے زاویہ ج ف د زاویہ ج ف ل سے اور ج ل د ج ل ف
سے دوچند ہے
اور چونکہ قوس ب ج قوس ج د کے برابر ہے
تو زاویہ ب ف ج زاویہ ج ف د کے برابر ہے (م ۳ ش ۲۷)
اور ب ف ج زاویہ ق ف ج سے
اور ج ف د ج ف ل سے دوچند ہے
اس لئے زاویہ ق ف ج زاویہ ج ف ل کے برابر ہے (علم ۷)
اور زاویۂ قائمہ ف ج ق زاویۂ قائمہ ف ج ل کے برابر ہے
اسی واسطے دو مثلثوں ف ق ج اور ف ل ج میں ایک کے دو زاوئے
دوسرے کے دو زاویوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں
اور ضلع ف ج جو ہر ایک میں مساوی زاویوں کے متّصل ہے دونو
میں مشترک ہے
اس لئے باقی ضلعے باقی ضلعوں کے برابر ہیں
اور تیسرا زاویہ تیسرے زاوئے کے برابر ہے (م ۱ ش ۲۶)
اس واسطے خط مستقیم ق ج ج ل کے برابر ہے
اور زاویہ ف ق ج زاویہ ف ل ج کے
اور چونکہ ق ج ج ل کے برابر ہے
تو ق ل ق ج سے دوچند ہے
اسی طریق سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ہ ق ب ق سے دوچند ہے
اور چونکہ ب ق ق ج کے برابر ہے چنانچہ ثابت ہو چکا ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

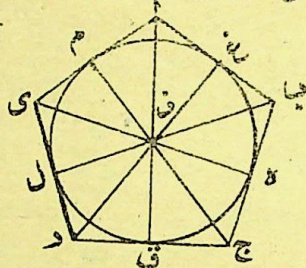
اور ق ل ق ج سے اور ہ ق ب ق سے دوچند ہے
اس واسطے ہ ق ق ل کے برابر ہے (علم ۶)
اسی طریق سے ثابت ہوسکتا ہے کہ غ ہ اور غ م اور م ل میں سے
ہر ایک ہ ق یا ق ل کے برابر ہے
اس واسطے مخمّس غ ہ ق ل م متساوی الاضلاع ہے
اور وہ متساوی الزّوایا بھی ہے
چونکہ زاویہ ف ق ج زاویہ ف ل ج کے برابر ہے
اور زاویہ ہ ق ل زاویہ ف ق ج سے
اور ق ل م ف ل ج سے دوچند ہے چنانچہ پہلے ثابت ہوچکا ہے
اس واسطے زاویہ ہ ق ل زاویہ ق ل م کے برابر ہے (علم ۶)
اور اسی طریق سے ثابت ہوسکتا ہے کہ زاویوں ق ہ غ اور ہ غ م
اور غ م ل میں سے ہر ایک زاویہ ہ ق ل یا ق ل م کے برابر ہے
اس واسطے پانچوں زاویے غ ہ ق اور ہ ق ل اور ق ل م اور
ل م غ اور م غ ہ باہم برابر ہیں
پس مخمّس غ ہ ق ل م متساوی الزّوایا ہے
اور وہ متساوی الاضلاع بھی ثابت ہوچکا ہے
اور دائرہ ا ب ج د ی پر بن گیا ہے
اور یہی مطلوب تھا +

تیرھویں شکل - سؤال

مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا میں دائرہ بناؤ -
فرض کرو ا ب ج د ی مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

ہم چاہتے ہیں کہ مخمس ا ب ج د ی کے اندر دائرہ بنائیں

زاویوں ب ج د اور ج د ی کی مستقیم خطوں ج ف اور د ف
سے تنصیف کرو (م اش ۹)
اور نقطہ ف سے جہاں وہ ملتے ہیں خط مستقیم ف ب اور ف ا اور
ف ی کھینچو
تو چونکہ ب ج ج د کے برابر ہے (فرضاً)
اور ج ف مثلثوں ب ج ف اور د ج ف میں مشترک ہے تو دو
ضلع ب ج اور ج ف دو ضلعوں د ج اور ج ف کے اپنی اپنی نظیر
کے برابر ہیں
اور زاویہ ب ج ف زاویہ د ج ف کے برابر ہے (عملاً)
اس واسطے قاعدہ ب ف قاعدہ ف د کے برابر ہے (م اش ۴)
اور باقی زاوئے باقی زاویوں کے برابر ہیں جن کے مقابل مساوی ضلعے
ہیں
اس واسطے زاویہ ج ب ف زاویہ ج د ف کے برابر ہے
اور چونکہ زاویہ ج د ی ج د ف سے دوچند ہے
اور ج د ی ج ب ا کے برابر ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور ج د ف ج ب ف کے
تو ج ب ا بھی ج ب ف سے دوچند ہے
اس واسطے زاویہ ا ب ف زاویہ ج ب ف کے برابر ہے
اسی باعث سے زاویہ ا ب ج خط ب ف سے تنصیف ہوگیا
اسی طریق سے ثابت ہوسکتا ہے کہ زاوئے ب ا ی اور ا ی د
مستقیم خطوں ا ف اور ف ی سے تنصیف ہوگئے ہیں
نقطہ ف سے ف ع اور ف ہ اور ف ق اور ف ل اور ف م
مستقیم خطوں ا ب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ا پر عمود
ڈالو (م اش ۱۲)
چونکہ زاویہ ہ ج ف زاویہ ق ج ف کے برابر ہے
اور قائمہ ف ہ ج قائمہ ف ق ج کے برابر ہے
اس لئے مثلثوں ف ہ ج اور ف ق ج میں سے ایک کے دو زاوئے
دوسرے کے زاویوں کے اپنی اپنی نظیر کے برابر ہیں
اور ضلع ف ج جو ہر ایک مثلث میں برابر زاویوں کے مقابل ہے
دونو میں مشترک ہے اس لئے باقی ضلع اپنی اپنی نظیر کے برابر ہوئے (م ا
ش ۲۶)
اسی سبب سے عمود ف ہ عمود ف ق کے برابر ہؤا
اسی طرح ثابت ہوسکتا ہے کہ ف ل اور ف م اور ف غ میں سے
ہر ایک ف ہ یا ف ق کے برابر ہے
اس لئے پانچوں خط مستقیم ف غ اور ف ہ اور ف ق اور ف ل اور
ف م باہم برابر ہیں
اس واسطے دائرہ جو مرکز ف سے ان پانچوں خطوں میں سے ایک کی

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

دوری پر کھینچا جائے وہ باقی چاروں کی حدّوں پر سے گزریگا اور خط مستقیم اب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ا سے مس کریگا کیونکہ زاوئے جو نقطوں غ اور ہ اور ق اور ل اور م پر ہیں اُن میں سے ہر ایک قائمہ ہے

اور چونکہ خط مستقیم جو دائرے کے قطر کی حد سے اُس پر قائمے بناتا ہؤا کھینچا جاتا ہے وہ دائرے سے مس کرتا ہے (م ۳ ش ۱۶)

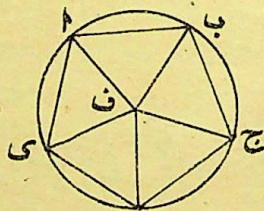
اس لئے خط مستقیم اب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ا میں سے ہر ایک دائرے سے مس کریگا

پس یہ دائرہ مخمّس اب ج د ی میں بن جائیگا

اور یہی مطلوب تھا ٭

چودھویں شکل - سؤال

مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا پر دائرہ بناؤ۔

فرض کرو اب ج د ی مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا ہے ہم چاہتے ہیں کہ مخمّس اب ج د ی کے اوپر دائرہ بنائیں

مستقیم خطوں ج ف اور ف د سے زاویوں ب ج د اور ج د ی کی تنصیف کرو (م ۱ ش ۹)

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

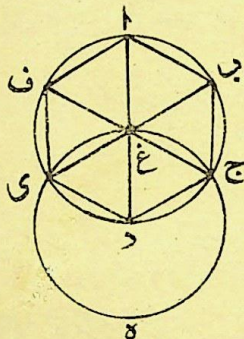
اور نقطہ ف سے جس پر یہ خط ملتے ہیں خط مستقیم ف ب اور ف ا
اور ف ی نقطوں ب اور ا اور ی تک کھینچو
جس طرح تیرھویں شکل میں ثابت ہوا یہاں بھی ثابت ہو سکتا ہے
کہ زاویہ ج ب ا اور ب ا ی اور ا ی د مستقیم خطوں ف ب
اور ف ا اور ف ی سے تنصیف ہو گئے ہیں
اور چونکہ زاویہ ب ج د زاویہ ج د ی کے برابر ہے
اور ف ج د زاویہ ب ج د کا
اور ج د ف ج د ی کا نصف ہے
اس لئے زاویہ ف ج د ف د ج کے برابر ہے (علم ۷)
اس واسطے ضلع ج ف ضلع ف د کے برابر ہے (م اش ۶)
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ف ب اور ف ا اور ف ی میں سے
ہر ایک ف ج یا ف د کے برابر ہے
اس لئے پانچوں خط مستقیم ف ا اور ف ب اور ف ج اور ف د
اور ف ی باہم برابر ہیں
پس جو دائرہ مرکز ف سے ان پانچوں میں سے ایک کی دوری پر
کھینچا جائے وہ باقی چاروں کی حدوں پر سے گزریگا
اور مخمس متساوی الاضلاع والزوایا ا ب ج د ی پر بن جائیگا
اور یہی مطلوب تھا +

پندرھویں شکل ۔ سوال

دائرۂ مفروضہ میں مسدس
متساوی الاضلاع والزوایا بناؤ ۔

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

فرض کرو اب ج د ی ف دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ اُس میں مسدّس متساوی الاضلاع والزّوایا بنائیں

دائرہ اب ج د ی ف کا مرکز غ دریافت کرو (م ۳ ش ۱)
اور قطر ا غ د کھینچو
اور مرکز د سے غ د کی دوری پر دائرہ ی غ ج ہ بناؤ ی غ اور
ج غ کو ملاؤ اور ان کو نقطوں ب اور ف تک بڑھاؤ اور اب اور
ب ج اور ج د اور د ی اور ی ف اور ف ا کو ملاؤ
تو مسدّس اب ج د ی ف متساوی الاضلاع والزّوایا ہوگا
چونکہ غ دائرہ اب ج د ی ف کا مرکز ہے
اس واسطے غ ی غ د کے برابر ہے
اور چونکہ د دائرہ ی غ ج ہ کا مرکز ہے
تو د ی د غ کے برابر ہے
اس لئے غ ی ی د کے برابر ہے (علم ۱)
اور مثلّث ی د غ متساوی الاضلاع ہے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اور اس لئے تینوں زاوئے ی غ د اور غ د ی اور د ی غ باہم برابر ہیں (م ا حاصل ش ۵)
مگر مثلث کے تینوں زاوئے ملکر دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں (م ا ش ۳۲)
اس لئے زاویہ ی غ د دو قائموں کی تہائی ہے
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ د غ ج بھی دو قائموں کی تہائی ہے
اور چونکہ خط مستقیم غ ج ی ب سے متصلے زاوئے ی غ ج اور ج غ ب دو قائموں کے برابر پیدا کرتا ہے (م ا ش ۱۳)
تو باقی زاویہ ج غ ب دو قائموں کی تہائی ہے
اس لئے زاوئے ی غ د اور د غ ج اور ج غ ب باہم برابر ہیں
اور مقابل کے زاوئے ب غ ا اور ا غ ف اور ف غ ی ان تینوں کے برابر ہیں (م ا ش ۱۵)
اس لئے چھوؤں زاوئے ی غ د اور د غ ج اور ج غ ب اور ب غ ا اور ا غ ف اور ف غ ی باہم برابر ہیں
مگر مساوی زاوئے مساوی قوسوں پر واقع ہوتے ہیں (م ۳ ش ۲۶)
اس لئے چھ قوسیں ا ب اور ب ج اور ج د اور د ی اور ی ف اور ف ا باہم برابر ہیں
اور مساوی قوسوں کے مقابل مساوی خط مستقیم ہوتے ہیں (م ۳ ش ۲۹)
اس لئے چھوؤں خط مستقیم باہم برابر ہوئے
اور مسدس ا ب ج د ی ف متساوی الاضلاع ہوئا

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اب ثابت کرتے ہیں کہ وہ متساوی الزّوایا بھی ہوگا
چونکہ قوس اف ی د کے برابر ہے
ان مساویوں پر قوس اب ج د زیادہ کرو
تو پوری قوس ف اب ج د پوری قوس ی د ج ب ا کے برابر ہوئی
اور زاویہ ف ا ی د قوس ف ا ب ا ج د پر
اور زاویہ اف ا ی ی د ج ب ا پر واقع ہے
اس لئے زاویہ اف ا ی ف ا ی د کے برابر ہے (م ۳ ش ۲۷)
اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ مسدّس اب ج دی ف کے باقی زاویوں
میں سے ہر ایک زاویہ اف ی یا ف ی د کے برابر ہے
پس یہ مسدّس متساوی الزّوایا ہوا
اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہے
اور وہ دائرۂ مفروضہ اب ج دی ف میں بن گیا ہے
اور یہی مطلوب تھا +

حاصل

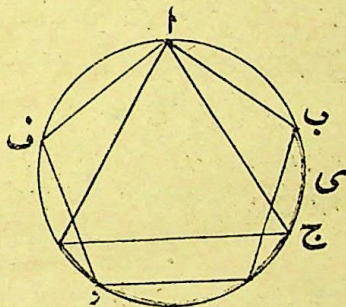
اس سے ظاہر ہے کہ مسدّس کا ضلع نصف قطر کے برابر ہوتا ہے اور اگر نقطوں ا اور ب اور ج اور د اور ی اور ف سے خط مستقیم دائرے سے مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو مسدّس متساوی الاضلاع والزّوایا دائرے پر بن جائیگا اور یہ اُسی طرح ثابت ہو سکتا ہے جس طرح کہ مخمّس کے اوپر اور اندر دائرہ بن چکا ہے اسی طرح مسدّس کے اوپر اور اندر بھی دائرہ بن سکتا ہے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

سولھویں شکل - سؤال

دائرۂ مفروضہ میں پندرہ ضلعے
کی شکل متساوی الاضلاع والزّوایا
بناؤ -

فرض کرو اب ج د دائرۂ مفروضہ ہے
ہم چاہتے ہیں کہ دائرہ اب ج د میں پندرہ ضلعے کی شکل متساوی الاضلاع والزوایا بنائیں

فرض کرو اج اُس مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع ہے جو دائرے کے اندر بنایا جائے (م ۴ ش ۲)
اور اب اُس مخمّس متساوی الاضلاع والزّوایا کا ضلع ہے جو اُسی دائرے میں بنایا جائے (م ۴ ش ۱۱)
تو اگر محیط اب ج د ف کو پندرہ برابر حصّوں میں تقسیم کرنا مطلوب ہو تو قوس اب ج میں جو محیط کی تہائی ہے پانچ حصّے اور قوس اب میں جو محیط کا پانچواں حصہ ہے تین حصّے واقع ہونگے

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

اس لئے ب ج ہیں جو دونو کا حاصل تفریق ہے دو حصے واقع ہونگے
نقطہ ی پر ب ج کی تنصیف کرو (م ۳ ش ۳۰)

تو ب ی اور ی ج ہیں سے ہر ایک محیط ا ب ج د ف کا پندرھواں
حصہ ہوگا

پس اگر خط مستقیم ب ی اور ی ج کھینچے جائیں اور اُن کے برابر
اور خط مستقیم تمام محیط ہیں رکھے جائیں تو پندرہ ضلعے کی شکل متساوی
الاضلاع والزّوایا دائرے کے اندر بنجائیگی

اور یہی مطلوب تھا +

اور اسی طرح جیسا کہ مخمّس ہیں مذکور ہؤا اگر پندرہ ضلعے کی شکل
دائرے کے اندر بناکر اُن کے نقاط تقسیم سے خط مستقیم دائرے کو
مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو پندرہ ضلعے کی شکل متساوی الاضلاع
والزّوایا دائرے کے اُوپر بنجائیگی اور اسی طرح جیسا کہ مخمّس ہیں بیان
ہؤا پندرہ ضلعے کی شکل متساوی الاضلاع والزّوایا کے اندر اور اُس
کے اُوپر بھی دائرہ بن سکتا ہے +

نئی شکلیں

جو چوتھے مقالے سے متعلّق ہیں

۱ دائرۂ مفروضہ ہیں ایک ایسا خط مستقیم رکھو جو خط مستقیم مفروض
کے متساوی اور متوازی ہو بشرطیکہ خط مفروض دائرے کے قطر
سے بڑا نہ ہو +

۲ جو مثلّث ایک ہی قاعدے پر واقع ہوں اور اُن کے راس کے
زاوئے باہم برابر ہوں تو وہ ایک ہی قوس پر واقع ہونگے +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۳ معیّن کے اندر دائرہ بناؤ +

۴ اگر ایک مثلّث میں دائرہ بنا کر اُس کے تینوں زاویوں سے تین خط اُن نقطوں تک جہاں مقابل کے ضلعے دائرے کو مس کرتے ہیں کھینچے جائیں تو یہ تینوں خط ایک ہی نقطے پر ملینگے +

۵ شکل مذکور میں ثابت کرو کہ اگر د ا ملایا جائے تو زاویہ ب ا ج کی تنصیف ہو جائیگی +

۶ مربّع مفروض میں مثلّث متساوی الاضلاع بناؤ (۱) جب مثلّث کا ایک زاویہ مربّع کے زاوئے پر واقع ہو (۲) جب مثلّث کا ایک زاویہ مربّع کے کسی ضلع کے نقطۂ تنصیف پر واقع ہو +

۷ تمام اشکال ذو اربعۃ الاضلاع میں سے جو دائرے کے اندر بنائی جائیں مربّع سب میں بڑا ہوتا ہے +

۸ دو خط مستقیم ایک نقطے سے نکل کر دائرے سے مس کرتے ہیں ایک ایسا دائرہ بناؤ جو دائرۂ مذکورہ اور دونو خطوں سے مس کرے +

۹ اگر دو دائروں کا جن میں سے ایک مثلّث کے اُوپر اور دوسرا اُس کے اندر بنایا جائے ایک ہی مرکز ہو تو وہ مثلّث متساوی الاضلاع ہوگا +

۱۰ اگر کسی مثلّث کے اندر دائرہ بنا کر نقاط تماس میں خط ملائیں تو جو مثلّث پیدا ہوگا وہ حادّ الزّوایا ہوگا +

۱۱ خط مستقیم مفروض پر ایک ایسا مثلّث متساوی السّاقین بناؤ جس کے قاعدے کے زاویوں میں سے ہر ایک راس کے زاوئے کی تہائی ہو +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۱۲ ایک ایسا دائرہ بناؤ جو مثلّث کے ایک ضلع اور باقی دو بڑھائے ہوئے ضلعوں سے مس کرے +

۱۳ اگر شکل گوشتہ کے موافق مثلّث کے تینوں طرف تین دائرے بنائے جائیں تو اُن کے مرکزوں میں جو خط ملائے جائینگے وہ بالضرور مثلّث کے زاویوں پر سے گزرینگے +

۱۴ اگر ربع دائرہ ا ب ج کے نقطہ ج سے وتر ج د محیط دائرہ تک کھینچیں جو خط ا ب سے کہ مرکز ب سے کھینچا جائے نقطہ ی پر تقاطع کرے اور پھر ا د کو ملاکر مثلّث ا د ی پر ایک دائرہ بنائیں اور ج ا کو ملائیں تو ثابت کرو کہ ج ا اُس دائرے کا مماس ہوگا +

۱۵ اگر دسویں شکل میں دائرہ جو مثلّث ا ج د پر بنایا گیا ہے بڑے دائرے سے نقطہ د اور ف پر تقاطع کرے اور د ف ملایا جائے تو ثابت کرو کہ د ف اور د ج برابر ہونگے +

۱۶ دسویں شکل میں ثابت کرو کہ ب د اُس مخمّس کا ضلع ہے جو دائرہ ا ج د کے اندر بنایا جائے +

۱۷ اگر ایک دائرے میں مثلث متساوی الساقین ا ب ج بناکر اُس کے راس ا سے ایک خط قاعدہ ب ج کو نقطہ ی پر قطع کرتا ہؤا کھینچیں جو محیط سے نقطہ د پر ملے اور د ب کو ملائیں اور ب د ی پر دائرہ بنائیں تو ثابت کرو کہ مثلّث کی ساق ا ب اُس دائرے کی مماس ہوگی +

۱۸ ا ب ج د ی مخمّس ہے اگر ا ج اور ب د جو نقطہ ف پر تقاطع کرتے ہیں ملائے جائیں تو ثابت کرو کہ ا ج ا ب اور ب ف کے مجموعے کے برابر ہوگا +

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

۱۹ اگر ا ب ج د ی ف مسدّس ہو اور خط مستقیم اج اور ب د اور ج ی اور د ف اور ی ا اور ف ب ملائے جائیں تو ایک اور مسدّس بن جائیگا جس کی مساحت پہلے مسدّس کی مساحت سے تہائی ہوگی ✢

۲۰ قطاع دائرۂ مفروض میں دائرہ بناؤ ✢

CC-0. In Public Domain. Gurukul Kangri Collection, Haridwar